様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年５月１５日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540096
研究課題名（和文）変形量子化による非可換関数等式とその幾何学の研究
研究課題名（英文）　A research on noncommutative functional identities and their Geometry by deformation quantization

研究代表者
吉岡　朗　　　（YOSHIOKA AKIRA）
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：40200935

研究成果の概要（和文）：
複素行列をパラメータとする変形量子化の族を考える。これは、典型的な star 積を拡張したものである。特に、一次式の star 指数関数を用いてヤコビのテータ関数を表示し、テータ関数の基本的な公式の変形量子化代数による表現をあたえた。二次式の star 指数関数の応用として、磁場のある場合の水素原子のハミルトニアンである MIC ケプラー問題のスペクトルを変形量子化の代数を用いて求めた。

研究成果の概要（英文）：
Star products are given by means of complex matrices, which are extension of typical star products in physics such as Moyal products. Jacobi theta functions are expressed by means of star exponential of linear functions, and fundamental identities are given by star product expressions. As an application of star exponentials of quadratic functions, we study the spectrum of MIC-Kepler problem in terms of star product algebra.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：複素解析幾何学、変形量子化，非可換関数論，非可換幾何学、量子化，数理物理学，力学的幾何学，幾何学と物理学

１．研究開始当初の背景

変形量子化(deformation quantization)とは，多様体上の関数集合の持つ通常の可換積を非可換で結合的な積に変形することをいう。これは，量子力学における「量子化・古典極限」の指導原理を自然な形で理解するため，1970 年代末に Bayan-Flato-Fronsdal -Lichnerowiz-Sternheimer らの数理物理学者により提唱された概念である。現在では，多様体上に種々の非可換代数を与えるための基本的なアイデアとして多くの研究者により研究されている。

初期の頃より，多様体上の変形量子化の存在と分類が問題とされていたが，

Dewilde-Lecomte，大森－前田－吉岡，Fedosov らによってシンプレクティック多様体の場合に解決され，その後、Kontsevich により一般のポアソン多様体で解決された。

現在，変形量子化の研究は，Kontsevich の理論の発展，場の量子論・弦理論への応用など，いくつかの流れにわかれ，新しい段階に入っている。しかしながら，現在までの研究は，変形のパラメータに関する形式的べき級数の枠内で行われるため，得られる情報が本質的に形式べき級数の代数的な関係にとどまり，幾何学的・解析学的に深い理解を得るためには限界がある。

このような状況で，形式的べき級数ではなく収束する級数を対象にして変形量子化理論の構築をめざし、研究をつつけてきた。その研究の経緯は次のようなものであった。

(1) 収束するべき級数で考えるためにどのような関数空間を設定するのか？がまず問題になる。これに対して，もっとも素朴で具体的な変形量子化である Moyal 積を考え，これに対して積が収束するべき級数の Frechet 空間を設定した。

(2) 空間の完備性を用いて超越的な元の Moyal 積を扱うことができるようになる。特に 2 次の非可換多項式の非可換指数関数について詳しく調べた。これらは特殊線形リー群に非常に似た構造を持つが，さらに Hitchin らにより研究された gerbe の構造を持っていることを示した)。

(3) 非可換 2 次式の非可換指数関数を用いて，非可換な関数を考察した。たとえば正弦関数，余弦関数, Gamma 関数, Beta 関数などの定義式に素朴に非可換指数関数を代入してこれらの非可換版を与え，これらのみたす関数等式を導き出した。特に、非可換正弦関数のある位相に関する無限積を得た。また Laplace 変換に対応する積分を用いて非可換多項式の逆元を与えることができた。

(4) さらに複素対称行列をもちいて Moyal 積の変形を考えた。この積はワイル代数の表現の変形を与えるが，これを用いてテータ関数のみたす関数等式を自然に導くことができた。また表現の変形の自由度を用いて種々の関数等式を導いた。

２．研究の目的

このような状況にあって，本研究はその全体構想として，変形のパラメータに関し収束するべき級数を基礎にして理論を構成し，幾何学および解析学に対して意義ある情報を引き出す枠組みを目指した。本研究においては，上記に得られた結果・方法を発展させ，種々の具体的な特殊関数，楕円関数の非可換版を与えそれらの満たす関数等式を研究する。 次の二つのを目的とする。

まず，整関数のべき級数展開を用いて種々の関数等式が得られるが，非可換な収束べき級数を用いてこれらの等式の非可換特殊関数版を研究する。いままでに非可換正弦関数の無限乗積表示が得られたがこれを他の関数への拡張を試みる。また，上記において得られた非可換楕円関数の関数等式を一般化しその性質を研究する。さらに，これらの非可換関数等式が変形量子化代数の下部構造であるポアソン代数に誘導する関係式を通じて，非可換関数等式の幾何学的な意味を研究する。

次に、いままでの研究で得られた種々の等式の応用を調べる。たとえば指数関数をポテンシャル関数にする量子ハミルトン系が数理物理で最近盛んに研究されている。これを変形量子化において調べる。これにより非可換 2 次多項式より広い関数系の非可換指数関数の具体例が得られる。

３．研究の方法

理論的な側面に関しては，

(1) いままでに得られている具体的な関数等式に類する例を増やすこと

(2) これらの例で得られた等式を，非可換なべき級数展開による等式で再構成することにより研究を進展させる。

応用的な側面に関しては，いままでの研究により，２次の非可換多項式の指数関数から得られるいくつかの等式が特殊関数の母関数に関係していることが分かっている。

これを利用して，積のべき級数を特殊関数により書き上げることから始める。物理数学で得られている諸公式と変形量子化の関係を具体的に書き上げていく。

４．研究成果

各年度にまとめると次のようになる。

（１）①古典力学におけるケプラー問題に関して，4 次元調和振動子の単位円周の作用による簡約化により得られることが知られている。これと並行して，水素原子のなす量子系に対しても同様な簡約化により，4 次元調和振動子のハミルトニアンから構成する方法が研究されている。この議論は水素原子に磁場が存在する場合にも拡張されている。これは、MIC ケプラー問題と呼ばれている。MIC 子のケプラー問題に対して，古典力学および量子系にまたがる簡約化を変形量子化で実行することができた。

②star 積による非可換な指数関数を積分表示により与える方法を研究した。まず，非可換１次多項式の非可換指数関数を具体的に調べ，その積分表示を与えた。これを用いて，非可換１次多項式の非可換指数関数の指数法則，合成積の公式などを調べた。今までに得られた特異的な元の積分表示による公式が得られた。

③海外の研究者 Anatol Odzijewicz 教授との研究連絡により，通常の star 積の q 変形の方法を知った。これは通常の積による非可換指数関数の正則化を与えるものであると見ることができる。これを用いた star 積の公式を具体的に書くことができた。この具体的な公式を用いて，特に q を１に収束させたときに通常の積に収束することが示せた。この積を用いて，今までに計算したいろいろな非可換指数関数の q 変形が原理的には得られることが分かった。

（２）①複素行列をパラメータとする変形量子化の族を考えることが出来る。この時，対称行列に対する変形量子化代数は可換代数となる。特に生成元がひとつの場合に、一次式のstar 指数関数を用いてヤコビのテータ関数を表示する公式が今までの研究で得られている。その応用としてテータ関数の擬周期性の等式、虚数変換の公式などの変形量子化代数による表現が得られた。さらに，これを用いてテータ関数の加法公式の直接証明を与えることが出来た。

②変形量子化の応用として、具体的な物理系のスペクトルに関する問題を扱った。磁場のある場合の水素原子のハミルトニアンをMIC ケプラー問題と呼ぶ。このスペクトルが作用素を用いて計算されているが、これを変形量子化の代数を用いて求めることが可能であることを示した。作用素の固有値問題に対応する方程式を、変形量子化代数のなかで構成することが可能である。これはハミルトン作用素の変形量子化を用いた表現とみなすことが出来る。作用素のグリーン関数に対応する関数を変形量子化代数のなかで具体的に構成することが出来た。自由度４の調和振動子の古典力学系における、リー群による簡約化を直接用いることが可能であることも示した。

（３）①現在，変形量子化は様々な分野に応用されているが、これらは主に積が変形パラメータについて形式的べき級数であるものを扱っている一方で、本研究においては積が収束する級数となるものを調べた．これによ

り，変形量子化代数を用いて作用素の固有関数，固有値に対応するものが扱えるようになる点に意義がある．特に，変形量子化を用いると作用素ではなく，相空間のシンプレクティック構造をもちいて、固有関数展開など様々な作用素的な量の計算が可能となること，すなわち，作用素的な対象を微分幾何的な対象に置き換えて研究することが可能になる点が重要である．その具体的な例として量子 MIC ケプラー問題を調べた．古典 MIC ケプラー問題は，単純な調和振動子からシンプレクティック簡約を用いて得られる．変形量子化を用いることにより量子系において，相空間における微分幾何学的な量を用いて固有関数展開およびスペクトル分解に対応する議論が可能となることを具体的に示した．
②従来の研究において典型的なモイアル積，正規積そして反正規積を，複素行列をパラメータとする積に拡張した．この時パラメータづけされた積の族に対し様々な問題が起こることを今までの研究で指摘してきたが，生成元が２である場合について，特に二次式の非可換指数関数を詳しく調べた．生成元が２の場合，非可換指数関数は具体的に表すことが可能であり，これらの満たす非可換関数等式，特異点から生ずる非可換指数関数のリーマン面を調べた．また，一次式の非可換指数関数を用いて三角関数，ガンマ関数，テータ関数など重要な関数の非可換版を与えその性質を調べた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Tomoyo Kanazawa, Akira Yoshioka, Star product and its application to the MIC-Kepler problem , Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 25 (2012), 57-75, 査読有
② Mari Iida, Akira Yoshioka, Star Products and Applications, Journal of Geometry and Physics, 20 (2010), 49-56, 査読有
③ Akira Yoshioka, Star Products and Theta Functions, AIP proceedings , 1307 (2010), 203-208, 査読有
④ Toshio Tomihisa, Akira Yoshioka, Journal of Geometry and Physics, 19 (2010), 99-111, 査読有
⑤ Akira Yoshioka, Examples of star exponentials, AIP conference proceedings, 1191 (2009), 188-193, 査読有

〔学会発表〕（計５件）

① Akira Yoshioka, Star products and its application to MIC Kepler problem, XIIIth international conference on geometry, integrability and quantization, 2011/6/3, Varna(Bulgaria)
② Akira Yoshioka, Star products and its applications, XXIX workshop on geometric methods in physics, 2010/06/28, Bialowieza (Poland)
③ Akira Yoshioka, Star exponential calculus, XIth international conference on geometry, integrability and quantization, 2010/6/5, Varna (Bulgaria)
④ Akira Yoshioka, A family of star products and star exponentials, XIth international conference on Geometry, integrability and quantization, 2009/6/5, Varna (Bulgaria)
⑤ Akira Yoshioka, Examples of star exponential functions, XXXVIIIth workshop on geometric methods in physics, Bialowieza (Poland)

〔図書〕（計　件）

① M. Norbert Hounkonnou, Akira Yoshioka, Hindwai Publishing corporation, Nonlinear and noncommutative mathematics, New developments and applications in quantum physics, 2010, 318pages
② Ivailo Mladenov, Akira Yoshioka, Bulgarian Scientific Publishers, Proceedings of the international conference on geometry, integrability and quantization XI, 2010, 232pages
③ Ivailo Mladenov, Akira Yoshioka, Bulgarian Scientific Publishers, Proceedings of the international conference on geometry, integrability and quantization X, 2009, 288pages

６．研究組織

(1)研究代表者

吉岡　朗 (YOSHIOKA AKIRA)
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：40200935

(3)連携研究者

大森　英樹 (OMORI HIDEKI)
東京理科大学・理工学部・嘱託教授
研究者番号：20087018
前田　吉昭 (MAEDA YOSHIAKI)
慶応義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40101076
宮崎 直哉　(MIYAZAKI NAOYA)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：50315826