

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 10 日現在

機関番号：11301
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21540097
 研究課題名（和文） 共形幾何および Einstein 計量・異種微分構造の幾何

研究課題名（英文） Conformal Geometry, and Geometry of Einstein Metrics and Exotic Differentiable Structures

研究代表者
 芥川 一雄（AKUTAGAWA KAZUO）
 東北大学・情報科学研究科・教授
 研究者番号：80192920

研究成果の概要（和文）：可微分コンパクト多様体の山辺不変量と呼ばれる微分位相不変量は、共形幾何における重要な基本的研究対象である。関連して、特異空間上の山辺の問題および山辺定数の研究も同時に重要である。本研究の具体的研究成果は、以下の通りである。

- ・無限被覆空間の山辺定数に関する Aubin の補題。
- ・それに伴う特異集合を持った漸近的平坦な空間に対する正質量定理。
- ・オービフォルド山辺不変量の計算法を与えた。
- ・正の共形平坦 3 次元閉多様体が Klein 多様体であることの証明。
- ・conic space 上の山辺の問題の可解性。

研究成果の概要（英文）：For a closed differentiable manifold M , a differential invariant of M , called the Yamabe invariant of M , is one of fundamental subjects in conformal geometry. The studies of the Yamabe problem on singular spaces and Yamabe constants are also important. The results of this Research Theme are the following:

- ・Aubin's Lemma for the Yamabe constants of infinite covering spaces.
- ・Positive Mass Theorem for asymptotically flat spaces with singularities.
- ・Computations of the orbifold Yamabe invariant.
- ・Proof that any closed 3-manifold with positive flat conformal structure is Kleinian.
- ・The solvability of the Yamabe Problem on conic spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何，幾何解析，微分トポロジー，共形幾何，山辺不変量，スカラー曲率，Einstein 計量，特異空間

- | | |
|---|---|
| <p>1. 研究開始当初の背景
 共形幾何は、シンプレクティック幾何と</p> | <p>同様に微分トポロジーとリーマン幾何の
 中間的な位置にあり、多様体のトポロジーを</p> |
|---|---|

色濃く反映する興味深い研究対象である。特に異種球面等 1960 代頃に大きく発展した微分トポロジーの諸結果を更に幾何的および幾何解析的に深く研究するための微分幾何における適切なカテゴリーでもある。また幾何に自然に現れる非線形方程式 (Seiberg-Witten 方程, Ricci flow, 逆平均曲率流) と深く関係しており, 今後の更なる発展が望まれる分野である。山辺定数等の様々な共形不変量を有効に使う, 山辺不変量・Weyl 不変量等の(無限次元的かつ非線形な)興味深い微分位相不変量が定義されている。しかしそれらの研究, 特に不変量の値を決定することは, 一般に非常に難しいのが現状である。それらの中でも, 山辺不変量と呼ばれる概念は, 「可微分多様体の大域的な曲がり」を表す一つの指標として, 最も基本的な共形幾何の研究対象である。近年大きく発展した 3・4 次元多様体の山辺不変量に限っても, そこで用いられている手法は表面上互いに全く異なっており, それらの一般的取り扱いや普遍的理解は, 未解決の状態である。

山辺不変量は, 小林治(熊本大), Schoen により独立に定義された。この不変量の定性的研究は先ず, 小島の Einstein 計量の一意性定理に関する先駆的研究, および Schoen-Yau, Gromov-Lawson の正スカラー曲率計量の存在と障害に関する研究等により進展した。4 次元多様体の山辺不変量, 特にその値の決定は, 主に LeBrun の Seiberg-Witten 理論の応用による研究により大きな進展をみた。3 次元多様体の山辺不変量, その値がゼロ以下の場合, Perelman の Ricci flow の研究により, 不変量の値の決定問題は完全に解決した。その値が正の場合は, 相対論・宇宙論に現れる mass に関する Penrose 不等式および逆平均曲率流の手法を応用して, \mathbf{RP}^3 , $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{S}^1$ の山辺不変量が Bray-Neves により決定された。

研究代表者の芥川は, 山辺不変量の体系的な理論構築を共同研究者の Botvinnik(Oregon 大)と行い, 多くの研究成果を得ている。また Neves(Imperial College)との共同研究において, 山辺不変量が, \mathbf{RP}^3 のそれより大きくなる, コンパクト 3 次元多様体の完全な分類を行った。この研究で発展させた無限被覆の山辺定数に関する Aubin の補題・共形的ラプラシアン Green 関数の幾何解析は, 今後も有用な手法となることが予想される。さらに石田・LeBrun との共同研究において, 山辺不変量がゼロ以下の場合, Perelman の不変量と山辺不変量が等しいことを一般次元で示した。これにより 4 次元以上の場合に於いても, ゼロ以下の山辺不変量の研究に Ricci flow の研究が有効であることが示される。

山辺不変量の手術理論は, 小林の不等式

に始まった。山辺不変量がゼロ以下の場合には, Gromov-Lawson の計量の bending 変形を発展させた Petean-Yun の結果により, その手術理論は完成された。一方山辺不変量が正の場合には, 上記の bending 変形をさらに洗練した Ammann 達の成果がある。しかしこの結果は, 手術してできる多様体の山辺不変量の良い評価を与えない。例えば芥川・Floit-Petean の研究により, 自明な手術の場合は上記のものより良い評価が得られる。Gromov-Lawson の bending 変形が良い評価を与えない原因は, その変形では, optimal な正の山辺計量族の isotopy 類を手術後の optimal な isotopy 類へと移さない, と考えられるからである。この点がゼロ以下の場合と正の場合の大きな相違点であり, かつ手術に伴う bending 変形の限界でもある。上記の理由により, 正スカラー曲率計量の isotopy 類の理論的研究は重要である。また手術理論と異種球面は密接な関係にあるので, それらの相補的な研究は重要である。正の山辺不変量の手術理論の研究は, 突き詰めていくと, コンパクト多様体上のリーマン計量全体の成す空間を正スカラー曲率計量の isotopy 類の視点から研究することに深く関係していることが分かる。この意味で, 山辺不変量の研究は超大域的な研究である。

山辺不変量の研究は, (Seiberg-Witten 理論等)近年新しく発展した種々分野と関係を持って発展している。言い換えると, 計量全体の空間の研究にはそれらの発展および将来生まれるであろう新理論が必須であることを示唆する。近年, 異種微分構造, 特に異種球面上の正曲率計量・Sasaki-Einstein 計量の構成等の微分幾何的研究が発展してきている。これらの研究は, Sasaki-Einstein 計量の更なる研究により奇数次元異種球面の山辺不変量の下からの評価が可能であることを示唆している。Sasaki-Einstein 計量の研究は, 正の山辺不変量の研究に応用される時期にきていると期待される。

山辺不変量は, 山辺定数の上限として定義されるので, 山辺計量の族の極限として得られる特異空間を扱う必要がある。そのような特異空間上で山辺の問題を研究しておくことは, 将来に向けて大変重要である。

2. 研究の目的

- (1) 山辺不変量の総合的研究: 極限空間の山辺定数と山辺不変量, Sasaki-Einstein 計量と異種球面の山辺不変量, 正スカラー曲率計量の isotopy 類と山辺不変量の手術理論。
- (2) 特異空間の山辺の問題の研究。
- (3) 正の山辺定数を持つ 3 次元共形平坦閉多様体の研究。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者の芥川は各連携研究者と、本研究課題および各専門分野との関連するテーマについて定期的に研究連絡を行う。

(2) 国内外の微分幾何・トポロジー・幾何解析等の研究集会に出席し、本研究に関連する分野の研究者と討論を行う。

(3) 電子メールおよび海外出張・国内招聘により、海外共同研究者と間接および直接的な研究連絡を行う。

4. 研究成果

(1) 正の閉共形多様体とその無限被覆空間の山辺定数を考え、それらの間に成立する(Aubin の補題と呼ばれる)不等式を証明した。

(2) (1)の無限被覆空間を1点 blow up して漸近的平坦な空間が得られるが、それは非常に複雑な特異集合を持っている。そのような特異集合を許容する場合でも、正質量定理が成立することを証明した。

(3) 山辺計量の極限としてしばしばオービフォールドが現れる。したがって、そのような特異空間の山辺不変量(オービフォールド山辺不変量と呼ばれる)を求めることは重要である。その不変量がゼロ以下の場合の計算法を与え、かついくつかのオービフォールド山辺不変量の計算をした。

(4) (2)の応用として、正の山辺定数を持つ3次元共形平坦閉多様体が Klein 多様体であることを証明した。

(5) 特異空間としては conic space を考え、その山辺定数が generic な場合には山辺の問題は可解であることを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

1. Kazuo Akutagawa, Aubin's lemma for the Yamabe constants of infinite coverings, Math. Ann. 532 巻, 829-864, 2012, 査読有.
2. Hironori Kumura, The radial curvature of an end that makes eigenvalues vanish in essential spectrum II, Bull. London Math. Soc., 43 巻, 985-1003, 2011, 査読有.
3. Hironori Kumura, The lower bound of the Ricci curvature which yields the infinite number of the discrete spectrum of the

Laplacian, Ann. I' institut Fourier, 61 巻, 1557-1572, 2011, 査読有.

4. Sumio Yamada, Some Aspects of Weil-Petersson Geometry of Teichmuller spaces, Surveys in Geometric Analysis and Relativity, Advanced Lect. in Math., 20 巻, 529-544, 2011, 査読有.
5. Segio Dain, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada, A counterexample to a Penrose inequality conjectured by Gibbons, Classical and Quantum Gravity, 28 巻, 085015, 2011, 査読有.
6. Chikako Mese and Sumio Yamada, Local uniformization and free boundary regularity of minimal singular surfaces, J. Geom. Anal., 21 巻, 743-766, 2011, 査読有.
7. Akito Futaki, Hajime Ono, Yuji Sano, Hilbert series and obstructions to asymptotic semistability, Advances in Math., 226 巻, 254-284, 2011, 査読有.
8. Futaki Akito, Hajime Ono, Einstein metrics and GIT stability, Sugaku Expositions, 24 巻, 93-122, 2011, 査読有.
9. Hajime Ono, A necessary condition for Chow semistability of polarized toric manifolds, J. Math. Soc. Japan, 63 巻, 1377-1389, 2011, 査読有.
10. 芥川和雄, 山辺不変量について--オービフォールドの山辺不変量--(2010 年度幾何学賞特別講演), 2010 年度日本数学会秋季総合分科会, 幾何学分科会・講演アブストラクト, 105-122, 2010, 査読無.
11. Chun Liu, Norifumi Sato, Yoshihiro Tonegawa, On the existence of mean curvature flow with transport term, Interfaces Free Bound., 12 巻, 251-277, 2010, 査読有.
12. Hironori Kumura, The radial curvature of an end that makes eigenvalues vanish in essential spectrum I, Math. Ann., 346 巻, 795-828, 2010, 査読有.
13. Sumio Yamada, Weil-Petersson Geometry of Teichmuller-Coxeter complex and its finite rank property, Geom. Dedicata, 145 巻, 43-63, 2010, 査読有.
14. Sumio Yamada, On singular Plateau problem, Recent Advances in Geometric Analysis, Advanced Lect. in Math., 11 巻, 217-229, 2010, 査読有.
15. Seiji Ohashi, Tetsuya Shiromizu, Sumio Yamada, Riemannian Penrose inequality and a virtual gravitational collapse, Physical Review D, 80 巻, 047501.1-047501.4, 2009, 査読有.
16. Akito Futaki, Hajime Ono, Guofang Wang, Transverse Kahler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, J. Differential Geom., 83 巻, 585-635, 2009, 査読有.

[学会発表] (計 12 件)

1. Kazuo Akutagawa, On the existence of conic Yamabe metrics, 国際研究集会「The 4-th TIM-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis」, 2012年3月19日, National Taiwan University, 台湾.
2. 芥川和雄, On the existence of conic Yamabe metrics, 仙台小研究会「西川青季教授定年退職記念」, 2012年3月16日, 東北大学.
3. Kazuo Akutagawa, 3-manifolds with positive flat conformal structure, 国際研究集会「The 10-th Pacific Rim Geometry Conference」, 2011年12月9日, 九州大学西新プラザ.
4. Yoshihiro Tonegawa, On the local regularity theorem for weak mean curvature flow, 国際研究集会「Emerging Topics on Differential Equations and their Applications, Sino-Japan Conference of Young Mathematicians」, 2011年12月6日, Nankai Institute, 中国.
5. Yoshihiro Tonegawa, A general regularity theorem for weak mean curvature flow, 国際研究集会「Hokkaido University Joint Symposium in Mathematics」, 2011年11月16日, Seoul National University, 韓国.
6. Kazuo Akutagawa, Computations of the orbifold Yamabe invariant, 国際研究集会「Tambara Workshop on Parabolic Geometries and Related Topics I」, 2010年11月3日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.
7. 芥川和雄, 山辺不変量について--オービフールドの山辺不変量--, 2010年度日本数学会秋季総合分科会, 幾何学賞特別講演, 2010年9月24日, 名古屋大学.
8. Kazuo Akutagawa, Computations of the orbifold Yamabe invariant, 国際研究集会「Scalar Curvature : Geometry and Topology」, 2010年9月2日, Munster大学, ドイツ.
9. Kazuo Akutagawa, The Yamabe invariant of cylindrical manifolds and computations of the orbifold Yamabe invariant, 国際研究集会「5-th Pacific Rim Conference on Mathematics」, 2010年6月30日, Stanford大学, アメリカ.
10. Yoshihiro Tonegawa, A new two-phase fluid problem with surface energy, 国際研究集会「New Trends in Geometric Flow」, 2010年6月8日, 京都数理解析研究所.
11. 芥川和雄, Notes on concordance and stable isotopy of positive scalar curvature metrics, 研究集会「幾何と情報科学の架け橋」, 2010年3月5日, 東北大学.
12. Yoshihiro Tonegawa, Existence of weak mean curvature flow with non-smooth forcing term, 国際研究集会「SIAM Conference on Analysis of PDEs」, 2009年12月7日, Miami, アメリカ.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

芥川 一雄 (AKUTAGAWA KAZUO)
東北大学・情報科学研究科・教授
研究者番号: 80192920

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

小林 治 (KOBAYASHI OSAMU)
熊本大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 10153595

利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)
北海道大学・理学研究科・教授
研究者番号: 80296748

久村 裕憲 (KUMURA HIRONORI)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号: 30283336

山田 澄生 (YAMADA SUMIO)
東北大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 90396416

小野 肇 (ONO HAJIME)
東京理科大学・理工学部・講師
研究者番号: 70467033