様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年５月８日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540099
研究課題名（和文）　空間グラフの位相幾何学的研究

研究課題名（英文）　A study of spatial graphs from topological viewpoint

研究代表者
谷山　公規（ TANIYAMA　KOUKI ）
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授
研究者番号：10247207

研究成果の概要（和文）：空間グラフ理論について多重度の観点から研究した。多重度という概念を一般のカテゴリーにおいて定義して研究した。その例として、結び目の結び目上の多重度を定義して研究した。さらにその一般化として、空間グラフの空間グラフ上の多重度を定義して研究した。また３次元ユークリッド空間から３次元ユークリッド空間への同相写像ではない連続写像が、ある結び目を別の結び目に写す場合に、その結び目型がどのようになるかを研究した。

研究成果の概要（英文）：We have studied spatial graphs from a viewpoint of the concept multiplicity. We have define the concept multiplicity on a category. As an example, we defined a multiplicity of a knot over another knot. For a continuous map from a three-dimensional Euclidean space to the three-dimensional Euclidean space that maps a knot to another knot, we studied their knot types.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何

１．研究開始当初の背景
空間グラフ理論は世界的に注目を集め、大きく発展し始めていた。日本は空間グラフ理論研究における世界的なリーダーであり、２００４年には空間グラフ理論の国際ワークショップを早稲田大学で開催していた。

２．研究の目的
空間グラフ理論は広く科学全般においての応用が期待される重要な、数学、特に位相幾何学、特に結び目理論の一分野である。この分野の基礎研究を推進し、応用への準備もするのが本研究の目的である。考える問題としては、空間グラフの各種同値関係に関する分類問題、空間グラフが内蔵する結び目・絡み目の問題、空間グラフの射影図の問題、空間グラフの不変量の問題、空間グラフの曲面を使っての研究問題などがある。

３．研究の方法
２０１０年に開催する空間グラフ理論国際ワークショップを主軸にしてその前後に国内外の諸研究者と研究交流して理論を進展させる。２００９年にはこれまでに得られ

ている結果を整理して、考えるべき問題をリストアップする。２０１０年にはそれらの問題を中心にして理論を発展させる。２０１１年には得られた成果を整理して発表し、今後の発展につなげる。また力学系理論、平面曲線論、可換代数など幾何学、数学の諸分野の研究者との研究交流をはかる。

４．研究成果

多重度に関する基礎研究を行ない、空間グラフ理論への応用の下地を作った。

一般にあるカテゴリーにおいて、各morphismに１以上の実数を対応させる対応がある条件を満たすとき、その対応をmultiplicityと定義した。

multiplicity の典型的な例としては map multiplicity がある。map multiplicity とは、集合 X から集合 Y への写像 f に対して、Y の各元に対する f の逆像の濃度の、Y の各元を動かしたときの上限として定義させるものである。この map multiplicity が写像の合成に関して自然に満たす性質を一般化したのが multiplicity である。

multiplicity に基づいて、オブジェクト X のオブジェクト Y 上の multiplicity が定義される。このオブジェクト X のオブジェクト Y 上の multiplicity に基づいて、オブジェクトの集合上に擬距離が定義される。オブジェクトの集合上に擬距離が定義されれば、それに基づいて、オブジェクトの集合のある商集合上に距離が定義される。このオブジェクトの集合のある商集合がどのような集合になるかを、いくつかの例において決定した。

map multiplicity に基づいて、位相空間と連続写像のカテゴリーにおいて、位相空間 X の位相空間 Y 上の multiplicity が定義される。この multiplicity を１次元有限複体上で研究した。１次元有限複体のあるクラス上では、この multiplicity が定義する擬距離が定義する商集合上の距離は、１次元有限複体の同相類上の距離となることを示した。偶数次元単体の１次元骨格である１次元有限複体について、その円周上の multiplicity を決定した。

map multiplicity に基づいて、群と準同形写像のカテゴリーにおいて、群 X の群 Y 上の multiplicity が定義される。この multiplicity を有限群上で研究した。群上では map multiplicity は kernel multiplicity と呼ばれるものと同値になる。kernel multiplicity の双対概念として、cokernel multiplicity が定義される。kernel multiplicity と cokernel multiplicity は違うものであるが、その定める有限群の同形類上の距離は一致することを示した。無限群においては異なる概念であることも例で示した。

単項イデアル整域上の有限生成加群と線形写像ののカテゴリーにおいてある multiplicity を定義した。この multiplicity について、単項イデアル整域上の有限生成加群 X の単項イデアル整域上の有限生成加群 Y 上の multiplicity を研究した。この multiplicity が定める単項イデアル整域上の有限生成加群の集合上の擬距離が定める単項イデアル整域上の有限生成加群の集合上の同値関係は、単項イデアル整域上の有限生成加群の同形であることを示した。

結び目の結び目上の multiplicity を定義して研究した。この multiplicity は無向結び目の全同位類上の距離を定める。この multiplicity と、結び目の橋指数、ブレイド指数などの結び目の幾何的な不変量との関係を考察した。またこの距離空間が非有界であることを、小沢誠氏による結び目の trunk に関する結果を用いて示した。結び目の自明な結び目上の multiplicity は結び目の不変量となる。この不変量が０、１、２、３の結び目をそれぞれ決定した。また４である結び目の例を示した。

また空間グラフの近傍カテゴリーを定義した。そして空間グラフの multiplicity について考察した。

新國亮氏との共同研究において以下を示した。結び目内蔵グラフからデルタワイ変形をして得られるグラフは結び目内蔵グラフであることとはよく知られている。また７頂点完全グラフが結び目内蔵グラフであることもよく知られている。実際に７頂点完全グラフに関してはより強い以下のことが知られている。７頂点完全グラフの任意の空間埋め込みに対して、そのハミルトンサイクルのコンウェイ多項式の２次の係数の総和は常に奇数になる。新國亮氏はこの結果の整数持ち上げ定理を示している。７頂点完全グラフからデルタワイ変形を何回かして得られる任意のグラフに対して、この整数持ち上げ定理に対応する定理が成立することを示した。７頂点完全グラフからデルタワイ変形を７回行なって得られるグラフはヒーウッドグラフである。実際に、７頂点完全グラフをトーラスに埋め込んで、トーラスを２色（白と黒）で塗り分けたときに、黒の３角形全てでデルタワイ変形して得られるグラフは、７頂点完全グラフのトーラス上の双対グラフと同型になり、７頂点完全グラフのトーラス上の双対グラフがヒーウッドグラフである。

新國亮氏、花木良氏、山崎晶子氏との共同研究において、７頂点完全グラフからデルタワイ変形とワイデルタ変形で得られるグラフの任意の空間埋め込みは非自明結び目を含むかもしくは３成分の完全非分離絡み目

を含むことを示した。

３次元ユークリッド空間から３次元ユークリッド空間への連続写像を一つ固定したとき、それによって結び目が結び目に写る場合に、結び目型がどのように変化しうるかを、いくつかの連続写像について考察した。具体的には、空間から空間への折り返し写像と、２重分岐被覆写像について、任意の結び目型が任意の結び目型へ写り得ることを示した。

また一般の３次元ユークリッド空間から３次元ユークリッド空間への連続写像に関して、その連続写像がある性質を満たせば、任意の結び目型が任意の結び目型へ写り得ることを示した。さらに、３次元ユークリッド空間から３次元ユークリッド空間への連続写像で、その定義する離散力学系が自明でないものに関して、その連続写像の繰り返しである結び目がつねにある結び目にうつる場合に、その結び目型について考察した。例えば、スタンダードなトーラス結び目は、２重分岐被覆写像を繰り返すことで、毎回別の結び目型に写る。またソレノイド写像を変形した写像でも毎回違う結び目型に写る結び目があることが分かる。

３次元球面内の非自明な結び目に対して、３次元球面を部分空間として含む空間で、結び目がその空間内のある円板の境界となるような空間について考察した。特に３次元球面内の自明な絡み目を境界とする円板をその境界で抽象的に貼り合わせて得られた空間について考察した。そのような自明な絡み目の成分数の最小値は結び目の不変量になるが、従来の不変量との関係を考察した。

坂本真理沙氏との共同研究において、グラフの２次元ユークリッド平面へのジェネリックイマージョンが含む平面曲線について研究した。

６頂点完全グラフの２次元ユークリッド平面へのジェネリックイマージョンが含む平面曲線のある種の平面曲線不変量の総和に関して、ジェネリックイマージョンによらない性質があることを示した。

どんなコード図に関しても、十分大きな完全グラフが存在して、その２次元ユークリッド平面への任意のジェネリックイマージョンはそのコード図を部分コード図として含むコード図を持つ平面曲線を含むことを示した。

抽象グラフの２つの空間埋め込みに対して、その交差交換をする辺のタイプを指定してのゴルディアン距離を定義して研究した。ハードソフト系の知恵の輪の解法の最短手順に関してはJozef Przytycki氏らの研究がある。この研究を一般化する定義となっている。

ハードソフト系知恵の輪のように、幾何的な部分とトポロジー的な部分が混在する多くの実用的な問題に対して、この空間グラフの辺のタイプを指定してのゴルディアン距離の研究の応用が期待される。ゴルディアン距離のかわりに一般の局所変形における距離を考える問題は今後の課題である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）

① $¥triangle Y$-exchanges and the Conway-Gordon theorems, to appear in Journal of Knot Theory and Its Ramifications, R. Nikkuni and K. Taniyama.

② Multiplicity of a space over another space, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan, K. Taniyama.

③ On intrinsically knotted or completely 3-linked graphs, Pacific J. Math., Vol. 252, No. 2, (2011) 407-425. R. Hanaki, R. Nikkuni, K. Taniyama, and A. Yamazaki.

④ Braid presentation of spatial graphs, Tokyo J. Math. 33 (2010), no. 2, 509-522, K. Kanno and K. Taniyama.

⑤ Almost positive links have negative signature, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 19, No. 2 (2010) 187-289. J. Przytycki and K. Taniyama.

⑥ A graph-theoretic approach to a partial order of knots and links, Topology Appl., 157 (2010) 1002-1010, T. Endo and T. Itoh and K. Taniyama.

⑦ Circle immersions that can be divided into two arc embeddings, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 743-751, K. Taniyama.

⑧ Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, Fund. Math. 205 (2009), 219-236, R. Nikkuni and K. Taniyama.

⑨ Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 18 (2009), no. 8, 1049-1063,

K. Taniyama.

６．研究組織

(1)研究代表者

谷山 公規 (Taniyama Kouki)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：10247207