

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 5 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540117

研究課題名（和文） 応用領域に現れる非線形偏微分方程式の研究

研究課題名（英文） Study on the nonlinear partial differential equations arising in applied field

研究代表者

石村 直之（ISHIMURA NAOYUKI）

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：80212934

研究成果の概要（和文）：応用領域に現れる非線形偏微分方程式の解析を通して、現象そのものの理解を深める研究を行った。最適投資問題に現れる Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を考察し、より広いリスク選好に関する非線形偏微分方程式を導出し、その解析を行った。さらに、非線形な相関を表すコピュラ関数の研究に取り組んだ。コピュラの時間発展の偏微分方程式を導出し、その解析を行った。ともに経済現象の理解を進めるための手法として有効である。

研究成果の概要（英文）：The study is performed on nonlinear partial differential equations (PDEs) arising in applied field with the purpose of deeply understanding the phenomena represented by the PDEs. We consider the Hamilton-Jacobi-Bellman equation in the optimal investment problem. We derive the slightly general nonlinear PDEs for the risk preference and analyze the equation. Moreover, we study the copula function, which describes the nonlinear relation among random variables. We introduce the time evolution of copulas. Both results are worth advancing the understandings of economics phenomena.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形偏微分方程式，数理モデル，数理ファイナンス，リスク選好，コピュラ

1. 研究開始当初の背景
 応用領域における数理解析は、そこに現れる現象が本質的に非線形であるため、常に困難

をともなってきた。近年、非線形偏微分方程式の理論が発展してきており、そこで得られ

た知見をもとにした解析を通して、応用領域に現れる現象そのものをよりよく理解することが可能となってきた。研究開始当初には、そのような状況を鑑み、主に次の2点に関して非線形偏微分方程式の研究を行う計画であった。

(1) 数理ファイナンスの研究

発展を続ける金融や保険の数理に関して、比較的到手薄であった非線形偏微分方程式論からの研究を行うこと。解析を通して、現象の理解を深めること。

(2) 界面運動をともなう非線形問題の研究

ここでの界面運動は(1)とも関連し、金融数理における自由境界として界面運動の解析である。金融数理として、現象そのものの知見を高めること。

2. 研究の目的

本研究の目的は、応用領域に現れる非線形偏微分方程式の解析を通して、その方程式が導かれた現象そのものをよりよく理解しようとするものである。応用領域でも、特に数理ファイナンスの分野での取り組みを行うことである。最適投資問題において最適性の特徴付けを行い、その際に導かれ、かつ難解で知られるHamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程式に関する研究、また、確率事象の相関を記述することができるコンピュータの研究を中心とし、数値計算とともに、非線形偏微分方程式が表す現象の解明の達成をもって研究の目的とする。

3. 研究の方法

数理科学の研究では、他の研究者との交流を通しての議論が大切である。そのため基本的には、数理ファイナンスの分野の先進的な欧州での国際会議に参加し成果を公表して、そこでの議論を通して研究を深めていく方法

であった。研究成果は挙がっており、有効な方法であったと考えている。

4. 研究成果

全般にわたり、応用領域のうちでも主に数理ファイナンスに現れる非線形偏微分方程式論を研究で成果を得た。

(1) まず、変動する経済状況のもとで、企業が満期における利益や効用を最適化しようとする問題において、確率制御理論のもと、最適化を特徴付ける難解で知られるHamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程式の解析を行った。このHJB方程式から特異な非線形偏微分方程式を別に導出し、その解の性質について論じた。導出された方程式の未知関数は、Arrow-Prattの絶対的およびリスク回避度に関連しているという点で経済学としても意味がある。さらに困難さは減少するわけではないが、偏微分方程式論の観点から取り扱いやすい形であった。成果は、論文番号の①⑤⑥⑧⑩である。

(2) 次に、コンピュータの発展に関して成果を得た。それは、離散版の高次元化に成功し精密化したことである。コンピュータとは、多くの確率事象の間の非線形な関わり具合を記述するために導入された関数で接続関数とも呼ばれている。定量的リスク管理(Quantitative Risk Management: QRM)においては、多くの事象の間の関係の仕方が問題となるため、コンピュータを用いてその非線形な関わりを記述することが一般となっている。ところが既存の多くの研究は静的なものであり、時間を含む研究は、我々が導入したコンピュータの発展が例外のひとつであった。しかし、それは拡散方程式の言葉で述べられており、方程式を通して現実の理解に資するという研究目的にはふさわしいものの、実用上計算上はやっかいなも

のであった。ここでの成果は、そのコンピュータの発展の離散版高次元化に拡張したことである。これは事象間の関わり方の研究には意義が大きく、QRMにおいても重要なものである。成果は、論文番号の②④⑦である。

(3) 離散過程における伊藤公式に関連して、オプションの評価や最適投資問題に関していくつかの成果を得た。連続の場合に比べて、より数値計算に向くことが示された。成果は、論文番号の③⑨である。

界面運動をともなう非線形偏微分方程式の研究については、数理ファイナンスでのその基礎方程式であるBlack-Scholesに関する成果⑧を得た。取引費用を考慮した場合の、解の存在を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

①. Naoyuki Ishimura and Daniel Sevcovic; On traveling wave solutions to a Hamilton-Jacobi-Bellman equation with inequality constraints, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 30 (2013), pp. 51-67. (査読有)

②. Naoyuki Ishimura and Yasukazu Yoshizawa; Evolution of multivariate copulas in discrete processes, *Procedia Economics and Finance*, 1 (2012), pp. 186-192. (査読有)

③. Takahiko Fujita, Naoyuki Ishimura, and Norihisa Kawai; Discrete stochastic calculus and its applications: an expository note, *Advances in Mathematical Economics*, 16 (2012), pp. 119-131. (査読有)

④. Naoyuki Ishimura and Yasukazu

Yoshizawa; Evolution of bivariate copulas in discrete processes, *JSIAM Letters*, 3 (2011), pp. 77-80. (査読有)

⑤. Naoyuki Ishimura and Sakkakom Maneenop; Traveling wave solutions to the nonlinear evolution equation for the risk preference, *JSIAM Letters*, 3 (2011), pp. 25-28. (査読有)

⑥. Naoyuki Ishimura, Lubin.G.Vulkov, and Migela .N.Koleval; Numerical solutions of a nonlinear evolution equations for the risk preference, in NMA 2010, I.Dimov, S.Dimova and N.Kolkovska (eds.), *Numerical Methods and Applications (Springer Lecture Notes in Computer Sciences)*, Vol. 6046 (2011), pp. 445-452. (査読有)

⑦. Naoyuki Ishimura and Yasukazu Yoshizawa; On time-dependent bivariate copulas, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, 59 (2011), pp. 303-307. (査読有)

⑧. Naoyuki Ishimura; Remarks on the nonlinear Black-Scholes equations with the effect of transaction costs, *Asia-Pacific Financial Markets*, 17 (2010), pp. 241-259. (査読有)

⑨. Naoyuki Ishimura and Yuji Mita; A note on the optimal portfolio problem in discrete processes, *Kybernetika*, 45 (2009), pp. 681-688. (査読有)

⑩. Naoyuki Ishimura and Hitoshi Imai; Global in space numerical computation for the nonlinear Black-Scholes equation, in "Nonlinear Models in Mathematical Finance: New Research Trends in Option Pricing," Edited by Matthias Ehrhardt, Nova Science Publishers Inc., New York,

2009, pp. 219-242. (図書所収論文)(査読有)

[学会発表] (計6件)

①. Naoyuki Ishimura; "Evolution of multivariate copulas in discrete processes," International Conference on Applied Economics, Uppsala, Sweden, June 29, 2012.

②. Naoyuki Ishimura; "Evolution of copulas in discrete processes with asymmetrical weight," 2012 Conference on Ease Asia Finance, Taipei, Taiwan, May 27, 2012.

③. Naoyuki Ishimura; "On the time evolution of bivariate copulas," Financial and Actuarial Mathematics 2011, Sofia, Bulgaria, August 27, 2011.

④. Naoyuki Ishimura; "On time-parametrized bivariate copulas," Czech-Japanese Seminar in applied Mathematics 2010, Prague and Telc, Czech, September 2, 2010.

⑤. Naoyuki Ishimura, Katsunori Itai, and Tsunemasa Shiba; "Mathematics education of financial engineering in the university for social sciences," The 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME 5), Tokyo, Japan, August 20, 2010.

⑥. Naoyuki Ishimura; "On the dynamics of default intensities," International Conference on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, Providence University, Taiwan, July 18, 2009. (招待講演)

[図書] (計3件)

①. 石村直之, 他6名, 実教出版, Primary 大学ノート よくわかる基礎数学, 2012年,

本文118ページ.

②. 石村直之, 他6名, 実教出版, Primary 大学ノート よくわかる微分積分, 2011年, 本文126ページ.

③. 石村直之, 他6名, 実教出版, Primary 大学ノート よくわかる線形代数, 2011年, 本文119ページ.

[その他]

ホームページ等

http://www.econ.hit-u.ac.jp/~koho/jpn/introduce/hokoku/hokoku2013/pdf/2013-217-ST_ishimura.pdf

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石村 直之 (ISHIMURA NAoyUKI)

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号: 80212934