

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 16 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540118

研究課題名（和文） 複雑ネットワーク上の確率・量子モデルの研究

研究課題名（英文） Study on stochastic and quantum models on complex networks

研究代表者 今野 紀雄（KONNO NORIO）

横浜国立大学・工学研究院・教授

研究者番号：80205575

研究成果の概要（和文）：1次元2状態の基本的な量子ウォークに関しては既に多くの知見が得られているので、それを拡張したモデルの局在化と極限定理などについて研究を行った。1カ所だけディフェクトが入る空間に依存するモデルに対して、局在化が起きる必要十分条件と弱収束極限定理についての結果を得ることが出来た。さらに閾値ネットワークの固有値と固有ベクトルを求め、閾値ネットワーク上の連続時間量子ウォークの極限測度について解析を行い、古典の連続時間ランダムウォークとの違いを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：There are many results on two-state space homogeneous quantum walks in one dimension. Therefore we investigated localization and limit theorems for some extended models. In fact we considered the one-dimensional quantum walk with one defect. In this model, we obtained necessary and sufficient conditions of localization and the weak limit theorems. Furthermore we got the eigenvalue and eigenvector of the threshold model. By using them, we analyzed limit measures of the continuous-time quantum walk on the model and clarified difference between the quantum walk and the corresponding classical random walk.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：量子ウォーク、複雑ネットワーク

## 1. 研究開始当初の背景

複雑ネットワーク上の確率モデルの数学的な研究は既に散見されるものの、複雑ネットワーク上の量子モデル、特に量子ウォークに限っても、世界的に見ても数学的側面からの研究は殆どなされていなかった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的はそのような背景のもとで、複雑ネットワークの様々なグラフ上で定義された種々の古典モデルと量子モデルに対して、その相互の関係が深く理解できるような統一的な理論を構築し、その諸性質を明らかにすると共に、基礎から応用まで含めた数

理的研究を行うことである。

### 3. 研究の方法

確率モデルとしては、コンタクトプロセスに、量子モデルとしては、量子ウォークに、また、複雑ネットワークとしては、閾値ネットワークモデルに着目し、研究を進めた。

特に期間中、最も研究が進んだ量子ウォーク周辺について以下記す。

量子ウォークの解析手法は主に、パスの組合せ論的手法、フーリエ解析による手法、停留位相法、母関数に基づく方法、直交多項式による手法、古典のランダムウォークと対応づけるゼゲディの手法、グラフの伊原ゼータ関数を用いる手法、結晶格子による手法、量子確率論を援用した手法、或いはそれらの幾つかを組み合わせたハイブリッドな手法などがある。例えば、1次元系の離散時間の量子ウォークの解析を、パスの数え上げの手法と母関数の計算を適宜組み合わせることによって行い、時間平均極限測度及び弱収束極限定理を求めた。

また、半直線上の離散時間量子ウォークの研究は、期間中新しく開発された手法であり、古典の理論との対応が明確であるだけに興味深い。

実際、古典の場合の直交多項式の理論としてはカーリン・マクレガーの公式等があるが、それらに対応する、量子系の解析手法がCGMV法である。このCGMV法はユニタリ性を持つCMV行列の諸性質を用い、半直線上、或いは、半直線上に帰着出来るグラフ上の量子ウォークの解析手法としては強力な手法である。

具体的には、カラテオドリ関数を求めた後に、それらの極限などを取ることで、複素平面の単位円周上の測度を決定する。カラテオドリ関数を用いることで、他の手法に比べ解析が容易になりえる。この測度を用い、量子ウォークのシステム全体を定める無限次元ユニタリ行列の $n$ 乗が、ローラン多項式と上記の測度より求まる。時刻 $n$ を無限大にすると、リーマン・ルベークの補題により測度の絶対連続部分が寄与せず、ポイントマスを持つところが影響を及ぼしえることが見て取れる。さらに弱収束極限定理に関しては、測度の絶対連続部分が寄与することが分かる。

一方、連続時間の量子ウォークに関しては、そのモデルが動き得るグラフの固有値と固有ベクトルを求めることにより、その漸近挙動を解析する。具体的には、閾値ネットワーク上の連続時間量子ウォークの極限測度については、閾値ネットワークの固有値と固有ベクトルを具体的に求めることにより行った。

### 4. 研究成果

離散時間量子ウォークに関しては、幾つかの1次元系について、時間平均極限測度及び弱収束極限定理を求めた。

例えば、1カ所だけディフェクトが入る空間的に非一様な離散時間量子ウォークについて、局在化が起こる必要十分条件を得た。このことにより、通常局在化が起こるのは、環境にランダムな揺らぎを与えた場合であるが、この結果より1カ所だけ揺らぎを入れさえすれば、局在化が起きることを明らかにした。その興味深い性質の為に、その後世界的にも空間的に非一様な離散時間量子ウォークの標準的かつ典型的な研究対象のモデルとなった。またこのモデルの時間平均極限測度は本質的に両側指数分布の形をしていることが分かった。さらに、弱収束極限定理を得ることにより、この1点ディフェクトモデルも、1次元3状態グローヴァー・ウォークのように、出発点にマスを持つディラック測度と今野関数に有理式が掛かった密度関数を持つ絶対連続な部分を持つ測度との凸結合になることが示され、我々が提唱しているユニヴァーサルティークラスの典型例になっていることが明らかになった。

さらに半直線を1点で結び付けたようなグラフに関しても、極限測度を計算し、局在化の必要十分条件を得た。このモデルも、上記と同じユニヴァーサルティークラスに属していることも分かった。

また、離散時間モデルについて、定常測度、定常確率振幅の概念を新たに導入し、この1点ディフェクトモデルについて、定常測度と極限測度との関係を明確にした。このような関係は、ある種の双対性の関係とも解釈することが出来、無限粒子系で成立するような双対性との類似がどこまで成立するか、大変興味深い。

さらに、離散時間量子ウォークをパス空間の中で考えることにより、伊藤の公式、田中の公式の量子ウォーク版を求めることが出来た。古典の場合には、マルチンゲールの部分が重要な役割を果たすが、量子ウォークの場合にはそれに対応する良い性質はまだ得られず、今後の課題である。また、古典のランダムウォークに関しては、その滞在時間に関して逆正弦則、一様分布定理など、直感に反するパラドックス的な現象があるが、それに対応する量子ウォーク版について計算を行い、類似の性質が現れることを確かめた。

有限グラフ上の離散時間量子ウォークの場合に、グラフの伊原ゼータ関数との関係を明らかにしつつ、そのシステムを定めるユニタリ行列の特性多項式の表現を与え、グラフの同型性や量子ウォークの周期性に関する研究の端緒を与えることが出来た。

一方、閾値ネットワーク上の連続時間量子

ウォークに関しては、定常分布を求めることが出来、対応する古典のランダムウォークとの挙動の違いを明らかにした。具体的には、古典の場合には一様分布に収束するが、量子ウォークの場合には、時間平均を取ると出発点にウォーカーが存在する確率が高い。その性質を用い、量子ウォーカーの存在確率を制御できると考えられる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

- ① Norio Konno and Iwao Sato, On the relation between quantum walks and zeta functions, *Quantum Information Processing*, Vol.11, No.2, pp.341-349 (2012), DOI:10.1007/s11128-011-0250-1
- ② Norio Konno, Sojourn times of the Hadamard walk in one dimension, *Quantum Information Processing*, Vol.11, No.2, pp. 465-480 (2012), DOI: 10.1007/s11128-011-0265-7
- ③ Kota Chisaki, Norio Konno and Etsuo Segawa, Limit theorems for the discrete-time quantum walk on a graph with joined half lines, *Quantum Information and Computation*, Vol.12, No.3&4, pp.314-333 (2012), <http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v12n34>
- ④ Takehisa Hasegawa, Norio Konno and Naoki Masuda, Numerical study of a three-state host-parasite system on the square lattice, *Physical Review E*, Vol.83, 046102 (2011), DOI: 10.1103/PhysRevE.83.046102
- ⑤ Yusuke Ide, Norio Konno, Takuya Machida and Etsuo Segawa, Return probability of one-dimensional discrete-time quantum walks with final-time dependence, *Quantum Information and Computation*, Vol.11 No.9&10, pp.761-773 (2011), <http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v11n910>
- ⑥ Kota Chisaki, Norio Konno, Etsuo Segawa and Yutaka Shikano, Crossovers induced by discrete-time quantum walks, *Quantum Information and Computation*, Vol.11 No.9&10, pp.741-760 (2011), <http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v11n910>
- ⑦ Yusuke Ide, Norio Konno and Takuya Machida, Entanglement for discrete-time quantum walks on the line, *Quantum Information and Computation*, Vol.11 No.9&10, pp.855-866 (2011), <http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v11n910>
- ⑧ Norio Konno and Etsuo Segawa, Localization of quantum walks via the CGMV method, *Quantum Information and Computation*, Vol.11, No.5&6, pp.485-495 (2011), <http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v11n56>
- ⑨ Yusuke Ide, Norio Konno and Naoki Masuda, Statistical properties of a generalized threshold network model, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 12, No. 3, pp.361-377 (2010), DOI: 10.1007/s11009-008-9111-5
- ⑩ Norio Konno, Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line, *Quantum Information Processing*, Vol.9, No.3, pp.405-418 (2010), DOI: 10.1007/s11128-009-0147-4
- ⑪ Norio Konno and Takuya Machida, Limit theorems for quantum walks with memory, *Quantum Information and Computation*, Vol.10, No.11&12, pp.1004-1017 (2010) <http://www.rintonpress.com/journals/qiconline.html#v10n1112>
- ⑫ Yutaka Shikano, Kota Chisaki, Etsuo Segawa and Norio Konno, Emergence of randomness and arrow of time in quantum walks, *Physical Review A*, Vol.81, 062129 (2010), DOI: 10.1103/PhysRevA.81.062129
- ⑬ Yusuke Ide and Norio Konno, Continuous-time quantum walks on the threshold network model, *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol.20, pp.1079-1090 (2010), DOI: 10.1017/S0960129510000381
- ⑭ Norio Konno, One-dimensional discrete-time quantum walks on random environments, *Quantum Information Processing*, Vol.8, pp.387-399 (2009). DOI: 10.1007/s11128-009-0116-y
- ⑮ Kota Chisaki, Masatoshi Hamada, Norio Konno and Etsuo Segawa, Limit theorems for discrete-time quantum walks on trees,

Interdisciplinary Information Sciences, Vol.15, No.3, pp.423-429 (2009), DOI: 10.4036/iis.2009.423

- ⑯ Akihiro Fujihara, Yusuke Ide, Norio Konno, Naoki Masuda, Hiroyoshi Miwa and Masato Uchida, Limit theorems for the average distance and the degree distribution of the threshold network model, Interdisciplinary Information Sciences, Vol.15, No.3, pp.361-366 (2009), DOI: 10.4036/iis.2009.361.
- ⑰ Masatoshi Hamada, Norio Konno and Wojciech Mlotkowski, Orthogonal polynomials induced by discrete-time quantum walks in one dimension, Interdisciplinary Information Sciences, Vol.15, No.3, pp.367-375 (2009), DOI: 10.4036/iis.2009.367
- ⑱ Norio Konno, Limit theorems and absorption problems for one-dimensional correlated random walks, Stochastic Models, Vol.25, pp.28-49 (2009), DOI: 10.1080/15326340802640941

[学会発表] (計 15 件)

- ① Norio Konno, Discrete-Time Quantum Walks and Related Topics, Workshop on Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Real World Complex Phenomena, 2012 年 1 月 17 日, Hanyang University (韓国)
- ② 今野 紀雄、複雑ネットワーク科学はどこに向かうのか?、第 4 回横幹連合コンファレンス、2011 年 11 月 28 日、石川ハイテク交流センター
- ③ Norio Konno, Quantum walks on a path space, Sapporo Workshop on Non-Commutative Analysis and Applications to Complex Phenomena, 2011 年 9 月 3 日、北海道大学
- ④ 今野 紀雄、量子ウォークに関する最近の話題、第 14 回 Dynamics of Complex Systems セミナー、2011 年 6 月 15 日、北海道大学理学部
- ⑤ Norio Konno, A universality class of quantum walks, Quantum and classical random processes, 2011 年 5 月 23 日、Centro de ciencias de Benasque Pedro Pascual (スペイン)
- ⑥ 今野 紀雄、非一様な環境下での量子ウォークの挙動、非線形物理の新展、2011 年 3 月 8 日、お茶の水女子大学
- ⑦ 今野 紀雄、量子ウォークの数理的構造、工学部システム工学科棟特別セミナー、2011 年 2 月 18 日、静岡大学

- ⑧ 今野 紀雄、量子ウォーク・伊原ゼータ関数・グラフの同型性、無限粒子系、確率場の諸問題 VI、2011 年 2 月 6 日、奈良女子大学
- ⑨ Norio Konno, Stationary measures and limit theorems of quantum walks with one defect, The 6th Jikji Workshop: Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2011 年 1 月 11 日、NIMS (韓国)
- ⑩ 今野 紀雄、複雑ネットワーク上の数理モデル小、複雑システムのネットワーク科学研究会、2010 年 11 月 29 日、情報通信研究機構
- ⑪ 今野 紀雄、量子ウォークの数理、日本数学会 (2010 年度秋季総合分科会) 統計数学分科会特別講演、2010 年 9 月 23 日、名古屋大学
- ⑫ Norio Konno, Limit theorems and localization for quantum walks on graphs, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications (SPA), 2010 年 9 月 9 日、Senri Life Science Center, Osaka
- ⑬ Norio Konno, Localization of discrete-time 1D space-inhomogeneous quantum walks, Academic Lecture, 2010 年 8 月 17 日、Suzhou University (中国)
- ⑭ 今野 紀雄、量子酔歩奇譚、GCOE Colloquium、第 12 回 現象数理談話会、2010 年 7 月 23 日、明治大学 生田校舎
- ⑮ Norio Konno, Localization of the space-inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line, Black Forest Focus on Soft Matter 3, 'Frontiers in Dynamics - from Random to Quantum Walks', 2010 年 6 月 4 日、Freiburg Institute for Advanced Studies (ドイツ)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

今野 紀雄 (KONNO NORIO)  
横浜国立大学・工学研究院・教授  
研究者番号：80205575

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：