

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 23 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540119

研究課題名（和文） 完全マイナーを持つ曲面上のグラフの構造に関する研究

研究課題名（英文） Structures of graphs on surfaces with complete minors

研究代表者

中本 敦浩 (Atsuhiko Nakamoto)

横浜国立大学・環境情報研究院・准教授

研究者番号：20314445

研究成果の概要（和文）：本研究では、固定された曲面に埋め込まれたグラフがどんな完全グラフ K_n をマイナーとして持つかどうかという問題を扱った。この問題は一般に難解であり、この問題とグラフ彩色を関連付けた問題は Hadwiger 予想として知られており、現在における重要な未解決問題の1つとして残っている。私たちの研究では、曲面上のグラフを三角形分割に限定し、種数3までの向き付け可能曲面と種数4までの向き付け不可能曲面の三角形分割に対して、 K_6 マイナーが存在するための条件をある特定の部分グラフの有無により特徴付けた。そのために、私たちは曲面上の既約三角形分割の完全リストと局所変形の理論を用いた。

研究成果の概要（英文）：This study deals with a problem: A given graph G on a fixed surface, which complete graph K_n does G have as a minor? This problem is difficult in general, and the problem combining this and graph coloring is well-known as Hadwiger's conjecture, one of the important open problems in the literature. In the research, restricting graphs on surfaces to be triangulations, we characterized the graphs on the orientable surface of genus up to 3 and the nonorientable surface of genus up to 4 containing K_6 as a minor. In order to do so, we used the complete list of irreducible triangulations on those surfaces and the theory for graph transformations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：離散数学，位相幾何学的グラフ理論

1. 研究開始当初の背景

与えられたグラフがどんな完全グラフ K_n をマイナーに持つかという問いは、グラフマイナー理論を指導原理とする昨今において、たいへん重要な研究テーマとなっている。（グラフ H がグラフ G のマイナーであるとは、 H が G から辺の縮約と除去、そして、孤

立点の除去により変形可能であることを意味する。）この問題は、 $n = 1, 2, 3, 4$ のとき、単なる演習問題に過ぎず、 $n = 5$ のとき、Wagner が 1937 年に解決した。ところが、 $n \geq 6$ のとき、本問題は未解決となっている。つまり、 K_6 をマイナーとして含まないグラフの大きなクラスはいくつか知られているものの、 K_6 をマイナーに含むグラフ全体を特徴

付けることはできていないし、その完全解決は絶望的であると考えられているようであった。

また、本問題は、いわゆる四色定理を解決するために考案された Hadwiger 予想に深く関係する。その予想とは、「完全グラフ K_n に縮約可能な任意のグラフは $(n-1)$ -彩色可能である」というものであり、これまでに $n \leq 6$ まで解決されているが、 $n \geq 7$ の場合は未解決である。特に、 $n=6$ の場合は Hadwiger 予想自身は解決されているものの、上述の問題は未解決であり、特に、 K_6 をマイナーに持たないグラフの特徴付けは興味深い。

一方、私が前回に科学研究費補助金により行った研究テーマ「曲面地図の幾何学的実現に関する研究」により、射影平面の三角形分割が K_6 に縮約可能であるための必要十分条件をある禁止部分グラフの存在により与えることができた。つまり、グラフ理論的に難解な問題に対して、まったくその流れとは異なる研究テーマから、その糸口を得ることができたわけである。

したがって、私たちは固定された曲面上のグラフに対して、 K_6 をマイナーとして含むものの全体を特徴付けることを目標として、研究をスタートさせた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「どのようなグラフが完全グラフ K_n をマイナーに持つか」という問題について、グラフの曲面への埋め込み可能性という位相幾何学的条件を絡めて解決することである。

3. 研究の方法

固定された曲面上のどんな三角形分割も、辺の縮約を繰り返し行うことにより、もはや縮約可能辺を持たない三角形分割に変形可能であり、それを既約三角形分割と呼ぶ。そして、任意の曲面について、既約三角形分割は有限個しか存在しないことが知られている。このことは、Wagner 予想「任意のグラフの無限列には、一方がもう一方をマイナーに持つような2つのグラフが存在する」の肯定的結果からも得られるし、既約三角形分割を曲面の種数の線形関数で抑えられるという私たちの最近の研究結果からも得られる。特に、球面、射影平面、トーラス、クラインの壺の既約三角形分割は1990年代にBarnette, Lawrencenko, Negami たちによって完全リストが決定されていた。

私たちは、 K_6 マイナーを持たない三角形分割は、辺の縮約により、 K_6 マイナーを持たない三角形分割に変形されることが示されることに着目した。そして、「もし、曲面 S の

三角形分割で K_6 マイナーを持たないものが存在すれば、 K_6 マイナーを持たない既約三角形分割が存在する」ことに気がついた。そして、既約三角形分割の完全リストを眺め、 K_6 マイナーを持たないものを特定していった。そして、 K_6 マイナーを持たない臨界的な構造を特定するに至り、それらの曲面の K_6 マイナーを持たない三角形分割の特徴付けに成功した。

一方、Sulanke は種数2の向き付け可能曲面と種数3と4の向き付け不可能曲面の既約三角形分割を計算機で生成することに成功しており、各曲面でそれらの総数は数十万個から数百万個に上る。私たちは、そのような膨大な既約三角形分割のリストに上述のアルゴリズムを適用するため、与えられた三角形分割の K_6 マイナーの有無を判定する計算機処理を試みた。その結果、 K_6 マイナーを持たない既約三角形分割のすべてに所望の部分構造を発見し、それまで得られた定理がこれらの曲面の三角形分割に適用可能であることを示すことに成功した。

4. 研究成果

私たちは当初の計画通り、種数の低いいくつかの曲面に対して、 K_6 マイナーを持つ三角形分割の特徴付けに成功した。その結果は、次のようになる。

定理1. 射影平面の三角形分割 G が K_6 マイナーを持つための必要十分条件は、 G が K_4 四角形分割を部分グラフとして持たないことである。

定理2. トーラスの三角形分割 G が K_6 マイナーを持つための必要十分条件は、 G が K_5 四角形分割を部分グラフとして持たないことである。

また、種数2, 3の向き付け可能曲面の K_6 マイナーを持たない三角形分割は、トーラスの K_6 マイナーを持たない三角形分割を適当な方法で貼り合わせたものであること。また、種数2, 3, 4の向き付け不可能な閉曲面の K_6 マイナーを持たない三角形分割は、トーラスと射影平面上の K_6 マイナーを持たない三角形分割を同様の方法で貼り合わせたものであることをつき止めた。

この事実は一般の曲面についても成立するものと思われるし、私たちもその事実を証明したいと強く思うが、現在の証明方法では、既約三角形分割の完全リストに依存する部分が大きく、それは可能ではない。

また、私たちの結果から三角形分割という条件を除いたらどのようなようになるかという問題も考えられる。そのような問題に対して、

部分的な結果も知られているが、うまくいきそうな手法が未だ確立できておらず、未解決問題として残っている。

近年、グラフのサイクルの長さの偶奇性を絡めた「奇マイナー」をテーマとして研究を始めたが、それに関する記述は次なる私たちの研究としたく、ここでは述べないことにする。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

1. Y. Higuchi, A. Nakamoto, K. Ota and T. Sakuma, N-Flips in even triangulations and Dehn twists on the torus, *Discrete Math.* **311** (2011), 1128--1135.
2. R. Mukae, A. Nakamoto, Y. Oda and Y. Suzuki, K6-Minors in triangulations on the nonorientable surface of genus 3, *Graphs Combin.* **26** (2010), 559--570.
3. A. Nakamoto and Y. Suzuki, Diagonal flips in quadrangulations on the sphere, *Yokohama Math. J.* **55** (2010), 105--112.
4. K. Kawarabayashi, T. Honjo and A. Nakamoto, Dominating sets in triangulations on surfaces, *J. Graph Theory* **63** (2010), 17--30.
5. A. Nakamoto, T. Shirakura and S. Tazawa, An alternative enumeration of self-complementary graphs, *Util. Math.* **80** (2009), 25--32.
6. A. Nakamoto and N. Sasanuma, Chromatic numbers of 6-regular graphs on the Klein bottle, *Australas. J. Combin.* **45** (2009), 73--85.
7. A. Nakamoto, K. Ota and Y. Oda, 3-trees with a few vertices of degree 3 in 3-connected planar graphs, *Discrete Math.* **309** (2009), 666--672.
8. R. Mukae and A. Nakamoto, K6-Minors in triangulations and complete quadrangulations, *J. Graph Theory* **60** (2009), 302--312.
9. K. Kawarabayashi, A. Nakamoto and Y. Suzuki, N-Flips in even triangulations on surfaces, *J. Combin. Theory, Ser. B.* **99** (2009), 229--246.

[学会発表] (計 24 件)

1. 中本敦浩, トーラスの直交分割について, 渡辺守先生退職記念関西グラフ理論研究会, 加計国際学術交流センター, 2012. 3. 8.
2. 中本敦浩, 「曲面上のグラフの彩色について」, 「曲面上のグラフの幾何学的実現について」(招待講演), 研究集会「直観幾何学」, 熊本大学, 2012. 2. 11, 12.
3. A. Nakamoto, Colored quadrangulations with Steiner points, 2011 年応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2011. 12. 16.
4. A. Nakamoto, Polychromatic coloring of cubic bipartite plane graphs, The 35th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics & Combinatorial Computing, Monash University, 2011. 12. 8.
5. 中本敦浩, Odd complete minors in even embeddings and their cycle parities, 第 23 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2011. 11. 26.
6. 中本敦浩, 3-正則平面 2 部グラフの多色 4-彩色について, 日本数学会, 信州大学, 2011. 9. 29.
7. A. Nakamoto, A linear number of diagonal flips in triangulations on surfaces, EuroComb '11, Renyi Institute, Hungary, 2011. 8. 31.
8. 中本敦浩, 3-正則平面 2 部グラフの多色 4-彩色について, 離散数学とその応用研究集会 2011, 奈良県婦人会館, 2011. 7. 31.
9. A. Nakamoto, Quadrangulations on 3-colored point sets with Steiner points, XIV Spanish Meeting on Computational Geometry, Universidad de Alcalá, in Alcalá de Henares, Spain, 2011. 6. 28.
10. A. Nakamoto, Quadrangulations on 3-colored point sets with Steiner points, 7th Slovenian International Conference on Graph Theory, Kompas Hotel, Slovenia, 2011. 6. 23.
11. 中本敦浩, Odd minors in even embedding on surfaces, 2010 年度応用数学合同研究集会, 龍谷大学瀬田キャンパス, 2010. 12. 15.

12. A. Nakamoto, Hamiltonian cycles in bipartite toroidal graphs with partite set of degree four vertices, The 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, Tokai University Pacific center, Honolulu, 2010.12.10.

13. A. Nakamoto, Y-Rotations in k-minimal quadrangulations on the projective plane, ACCOTA 2010, Playa del Carmen, Mexico, 2010.11.25.

14. 中本敦浩, Hamiltonian cycles in bipartite toroidal graphs with partite set of degree four vertices, 第22回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2010.11.12.

15. A. Nakamoto, Hamiltonian cycles in bipartite toroidal graphs with partite set of degree four vertices, The 6th Cracow Conference, Zgorzelisko, Poland, 2010.9.16.

16. 中本敦浩, Hamiltonian cycles in bipartite toroidal graphs with partite set of degree four vertices, 離散数学とその応用研究集会, 高知大学, 2010.7.31.

17. A. Nakamoto, Book embedding of toroidal bipartite graphs, 8th French Combinatorial Conference, Orsay, France, 2010.7.1.

18. A. Nakamoto, Vertex-face curve for bipartite quadrangulations on the torus, SIAM Conference on Discrete Mathematics, Austin, Texas, USA, 2010.6.16.

19. 中本敦浩, 2-Orientations of bipartite quadrangulations on the torus, 岡村治子先生退職記念研究集会, 甲南大学, 2010.3.7.

20. 中本敦浩, Book embedding of toroidal bipartite graphs, 2009年応用数学合同研究集会, 龍谷大学, 2009.12.19.

21. A. Nakamoto, Hamiltonian cycles in bipartite quadrangulations on the torus, 33rd Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, Newcastle, Australia, 2009.12.10.

22. 中本敦浩, Book embedding of toroidal bipartite graphs, 第21回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2009.11.27.

23. 中本敦浩, Hamiltonian cycles in bipartite quadrangulations on the torus, 離散数学とその応用研究集会, 茨城大学工学部, 2009.8.8.

24. A. Nakamoto, N-Flips in even triangulations and Dehn twists on the torus, British Combinatorial Conference, University of St Andrews, United Kingdom, 2009.7.9.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.edhs.ynu.ac.jp/Nakamoto-lab/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中本 敦浩 (Atsuhiko Nakamoto)

横浜国立大学・環境情報研究院・准教授
研究者番号: 20314445

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし