

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540121

研究課題名（和文） 集合値写像の非線形スカラー化手法の研究と数理計画への応用

研究課題名（英文） Study on Nonlinear Scalarization Methods for Set-Valued Maps and its Applications into Mathematical Programming

研究代表者

田中 環 (TANAKA TAMAKI)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：10207110

研究成果の概要（和文）：本研究では、先行研究(基盤研究(C)19540120)で導入した、集合に対する非線形スカラー化手法の理論的解析と数値計算アルゴリズムの開発を行い、数理計画問題への応用研究を行った。つまり、集合間の大小関係がこのスカラー化関数によって通常の実数の順序関係で保存されることを利用して、集合値写像に対する様々な不等式や不等式に関係した数理的性質を古典的な理論に帰着して導いた。

研究成果の概要（英文）：In this study, we give theoretical analysis on nonlinear scalarization methods for sets, which has been introduced in the previous study (research 21540121 supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C)), and we research algorithm development for its numerical calculations and its applications. That is to say we derive several mathematical properties related to certain inequalities for set-valued maps by the help of classical theory through the use of the invariant property of some scalarization methods for set-relationship.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：集合値計画，非線形スカラー化関数，均衡問題，集合値最適化，ベクトル最適化，凸解析学，数理計画問題，大域的最適化

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 集合値写像の取り扱い，非線形解析学，凸解析学及び最適化理論の分野において従来から研究が進められてきた。「Set-Valued Analysis」(1990)で有名な Aubin, 「Convex Analysis and Nonlinear Optimization」(2000)で有名な Borwein, あるいは

「Variational Analysis」(1998)で有名な Rockafellar の各グループに関係する研究者が精力的に研究を進めている。本研究で取り扱う非線形スカラー化関数については、むしろフランス・アヴィニオン大学の D.T.Luc, モロッコ・カディアヤド大学の H.Riahi, ドイツ・マーティンルーサー大学の C.Tammer の各グループの研究が先行している。特に、

- Göpfert, Tammer, Zălinescu らによるベクトル値関数に対する Ekeland 型変分原理 (Nonlinear Anal., Vol.39, 909-922, 2000)
- Hamel と Löhne による集合値写像に対する Ekeland 型変分原理 (J.Nonlinear Convex Anal., Vol.7, 19-37, 2006)

で提案された非線形スカラー化手法は従来のスカラー化手法とは全く異なり，凸性等の無理な仮定をせず，抽象的な線形位相空間で結果を与えており，様々な理論的な応用や具体的な応用科学への利用が期待できる。

(2)本研究代表者もこれまでベクトル最適化や集合値最適化の分野で，科学研究費補助金を利用して「ベクトル最適化の解析的研究」（奨励研究(A) 06740139, 0774013, 08740129, 09740129, 11740053, 基盤研究(C) 13640097)や「集合値写像の非線形スカラー化手法の研究と数理計画問題と統計科学への応用」(基盤研究(C)17540108),「集合値写像の非線形スカラー化手法の研究と数理計画への応用」(基盤研究(C)19540120)を行ってきた。その結果，集合に対する従来のスカラー化関数をすべて包括する新手法（**統一的非線形スカラー化関数**）を世界で初めて提案してその有用性を説き，多くの関心を持った。しかし，集合値写像の非線形スカラー化手法の研究には多くの未解決部分が残されている。

## 2. 研究の目的

先行研究で与えた，統一的非線形スカラー化関数についての理論的解析と数値計算アルゴリズムの開発，及び多次元データ解析への応用と数理計画問題やゲーム理論への応用研究を目的とする。すなわち，上記のスカラー化手法を利用して，従来の最適化・凸解析・ゲーム理論などの集合値写像への一般化とその有用性の検証や統計科学的なアプローチでデータ解析の新手法の開発を行なう。

## 3. 研究の方法

(1)統一的非線形スカラー化の遺伝的性質の調査：先行研究（2008年）で導入した非線形スカラー化関数に対して集合間の大小関係や凸性・半連続性について遺伝的性質が成立するかどうか調査する。

(2)集合値写像に対する Ekeland 型変分原理の精密化：ベクトル値関数に対する Ekeland 型変分原理や集合値写像に対する Ekeland 型変分原理を古典的な Ekeland の変分原理の自然な解釈から改良を試みる。

(3) 半順序ベクトル空間に値をとる非加法

的測度についての研究と応用：非負実数値集合関数である測度は，通常完全加法的であり，互いに素な集合の列の和の測度が，それぞれの集合の測度の和となる。統一的非線形スカラー化関数の性質を利用して，加法的でない集合関数，しかも実数値とは限らない，ベクトル値関数に対して従来の数理的な結果の拡張を考える。

(4)非線形スカラー化関数に関する計算アルゴリズムの開発：統一的非線形スカラー化関数の値を具体的に計算機で求めるためのアルゴリズムの開発を行う。計算シミュレーションを行うために，この逐次解法を実現する大域的最適化アルゴリズムを山田准教授と共に開発する。

(5)数理計画問題やゲーム理論への応用研究：集合値写像を含む数理計画問題の最適条件の精密化を行い，これまでにモデル化の難しかった問題に応用することを試みる。そこで，谷野教授と協力して，従来の数理計画や多目的協力ゲームへの応用研究を行う。

## 4. 研究成果

(1) 大学院生との共同研究によって，集合値写像に対する Ky Fan のミニマックス不等式を従来のものより簡潔な表現で与えることができた。その証明には，集合値写像に対する統一的非線形スカラー化関数の凸性と半連続性に関する遺伝的性質が効果的に利用されている。

(2) 大学院生との共同研究によって，集合値写像に対する錐凸関数の連続性を証明することができた。

(3) 大学院生との共同研究によって，集合値写像に対する Ekeland の変分原理を従来の結果に比べて簡単な形で示すことができた。

(4) 大学院生との共同研究によって，半順序ベクトル空間に値をとる非加法的測度についての Egoroff の定理と Lusin の定理に関する結果を得た。また，半順序ベクトル空間に値を取るベクトル値関数に対する，Hahn-Banach の定理の別証明を与えた。

(5) 磯貝教授，山田准教授と大学院生との共同研究によって，包絡分析法や統計手法を利用して多次元データに関する評価方法の応用研究を行った。

(6) 山田准教授及び大阪大学谷野教授と，大域的最適化問題の本研究に関係した外部近似法についての共同研究を行った。

(7) 本研究課題に関連して、次の海外の研究者との研究交流を行った。

- ① 分数計画問題の最適性条件に対して台湾中原大学の頼漢卿教授と共同研究を行った。
- ② 3 規準二人ゼロ和行列ゲームに対する行列の分類について、韓国釜慶大学校の李圭明教授らのグループと共同研究を行い、新たな結果を得ることができた。
- ③ 離散 2 次計画問題に関して台湾成功大学の許瑞麟教授から講演を行ってもらった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 24 件)

- ① I. Kuwano and T. Tanaka, Continuity of cone-convex functions, to appear in Optimization Letters. 査読有  
DOI: 10.1007/s11590-011-0381-4
- ② M. Hojo and T. Tanaka, Optimality condition for vector-valued DC programming problems, J. Nonlinear Convex Anal., 13(1), 57-64 (2012). 査読有
- ③ S. Washio, S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino, Improvements by analyzing the efficient frontier in DEA, European Journal of Operational Research, 217(1), 173-184 (2012). 査読有  
DOI: 10.1016/j.ejor.2011.09.002
- ④ T. Watanabe and T. Tanaka, On Regularity for Non-Additive Measure, in “Nonlinear Mathematica for Uncertainty and its Applications,” Advances in Intelligent and Soft Computing, Springer-Verlag, Berlin, 2011, pp. 69-75. 査読有  
DOI: 10.1007/978-3-642-22833-9\_8
- ⑤ T. Tanaka and T. Watanabe, On Lusin’s Theorem for Non-Additive Measure, in “Nonlinear Mathematica for Uncertainty and its Applications,” Advances in Intelligent and Soft Computing, Springer-Verlag, Berlin, 2011, pp. 85-92. 査読有  
DOI: 10.1007/978-3-642-22833-9\_10
- ⑥ S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino, Outer approximation method incorporating the Ferrari’s method for solving a quadratic dc programming problem, J. Nonlinear Convex Anal., 12(1), 17-27 (2011). 査読有
- ⑦ S. Washio, S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino, Improvement indices keeping the feasibility in deta envelopment analysis, J. Nonlinear Convex Anal., 12(1), 29-48 (2011). 査読有

- ⑧ S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino, Dual and bidual problems for a Lipschitz optimization problem based on quasi-conjugation, J. Math. Anal. Appl., 378, 198-212 (2011). 査読有
- ⑨ Y. Sonda, I. Kuwano, and T. Tanaka, Cone-semicontinuity of set-valued maps by analogy with real-valued semicontinuity, Nihonkai Math. J., 21(2), 91-103 (2010). 査読有
- ⑩ I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequalities, J. Nonlinear Convex Anal., 11(3), 513-525 (2010). 査読有
- ⑪ Y. Araya and T. Tanaka, On generalizing Cammaroto-Chinni’s theorem, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2010, pp. 29-35. 査読有
- ⑫ K. Kimura and T. Tanaka, On saddle-point problems for set-valued functions, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2010, pp. 115-124. 査読有
- ⑬ I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2010, pp. 161-177. 査読有
- ⑭ S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino, Outer approximation methods incorporating Lipschitz optimization techniques for solving a DC programming problem, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2010, pp. 417-432. 査読有
- ⑮ S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino, Outer approximation method incorporating a quadratic approximation for a dc programming problem, Journal of Optimization Theory and Applications, 144(1), 156-183 (2010). 査読有
- ⑯ E. Isogai and A. Futschik, Sequential estimation of a linear function of location parameters of two negative exponential distributions, Journal of Statistical Planning and Inference, 140(9), 2416-2424 (2010). 査読有
- ⑰ I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps, Proceedings of Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 193 - 204. 査読有

⑩ S. Yamada, T. Tanaka, and T. Tanino, A dual problem for a Lipschitz optimization problem, Proceedings of Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp. 349- 359. 査読有

〔学会発表〕(計 35 件)

- ① 樋口政和, 3 規準二人ゼロ和行列ゲームに対する行列の分類, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2011 年 8 月 31 日, 京都大学数理解析研究所.
- ② 渡辺俊一, ベクトル空間と Chain 完備な半順序ベクトル空間の直積における分離定理について, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2011 年 8 月 31 日, 京都大学数理解析研究所.
- ③ 山田修司, 混合整数計画問題に対する最適化について, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2011 年 8 月 31 日, 京都大学数理解析研究所.
- ④ 久保貴大, スカラー化を用いた集合値写像の Ekeland の定理, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2011 年 8 月 31 日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑤ 桑野一成, 集合値写像に対するミニマックス定理, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2011 年 8 月 31 日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑥ 北條真弓, ベクトル値 DC 計画問題に対する最適条件について, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2011 年 8 月 31 日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑦ Tamaki Tanaka, Some minimax theorems for set-valued maps, The Seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (非線形解析学と凸解析学に関する第 7 回国際会議, NACA2011), 2011 年 8 月 4 日, 韓国釜山市, 国立釜慶大学校.
- ⑧ Issei Kuwano, Saddle point theorems for set-valued maps, The Seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (非線形解析学と凸解析学に関する第 7 回国際会議, NACA2011), 2011 年 8 月 4 日, 韓国釜山市, 国立釜慶大学校.
- ⑨ Takahiro Kubo, Ekeland's variational principle for set-valued maps via scalarization, The Seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (非線形解析学と凸解析学に関する第 7 回国際会議, NACA2011), 2011 年 8 月 4 日, 韓国釜山市, 国立釜慶大学校.
- ⑩ Syuuji Yamada, Duality for Lipschitz optimization over the weakly efficient set

based on quasi-conjugation, The Seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (非線形解析学と凸解析学に関する第 7 回国際会議, NACA2011), 2011 年 8 月 2 日, 韓国釜山市, 国立釜慶大学校.

- ⑪ Syuuji Yamada, Successive approximation algorithms for solving a canonical DC programming problem, the 19th Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies, 2011 年 7 月 10 日, Melbourne Convention and Exhibition Centre, Melbourne, Australia.
- ⑫ Satoshi Washio, Expansion of the cross efficiency evaluation in DEA, The 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (最適化の技術と応用に関する第 8 回国際会議, ICOTA8), 2010 年 12 月 13 日, 中華人民共和国, 上海市, 復旦大学.
- ⑬ Syuuji Yamada, Successive search methods for a canonical dc programming problem, The 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (最適化の技術と応用に関する第 8 回国際会議, ICOTA8), 2010 年 12 月 12 日, 中華人民共和国, 上海市, 復旦大学.
- ⑭ Tamaki Tanaka, Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps, The 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (最適化の技術と応用に関する第 8 回国際会議, ICOTA8), 2010 年 12 月 11 日, 中華人民共和国, 上海市, 復旦大学.
- ⑮ Issei Kuwano, Some minimax theorems for set-valued maps, The 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications (最適化の技術と応用に関する第 8 回国際会議, ICOTA8), 2010 年 12 月 11 日, 中華人民共和国, 上海市, 復旦大学.
- ⑯ 鷲尾 哲, DEA において加重和を用いた全順序評価, 2010 年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 2010 年 9 月 17 日, 福島県福島市, コラッセ福島.
- ⑰ Issei Kuwano, Generalized Fan's inequalities for se-valued maps via scalarization, The Second Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (第 2 回非線形解析学と最適化に関するアジア会議, NAO-Asia2010), 2010 年 9 月 11 日, タイ・プーケット, ロイヤルパラダイスホテル.
- ⑱ Syuuji Yamada, A global optimization method searching a feasible solution in two-dimensional subspace for solving a dc programming problem, The Second Asian

Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (第2回非線形解析学と最適化に関するアジア会議, NAO-Asia2010), 2010年9月11日, タイ・ブーケット, ロイヤルパラダイスホテル.

⑲ Tamaki Tanaka, Nonlinear scalarizing functions for set-valued maps and its applications, The Second Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (第2回非線形解析学と最適化に関するアジア会議, NAO-Asia2010), 2010年9月9日, タイ・ブーケット, ロイヤルパラダイスホテル.

⑳ Satoshi Washio, Pareto-efficient target by obtaining the facets of the efficient frontier in DEA, The Second Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (第2回非線形解析学と最適化に関するアジア会議, NAO-Asia2010), 2010年9月9日, タイ・ブーケット, ロイヤルパラダイスホテル.

㉑ 渡辺俊一, 半順序ベクトル空間における Hahn Banach 定理について, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2010年9月1日, 京都大学数理解析研究所.

㉒ Issei Kuwano, 非線形スカラー化手法を用いた集合値写像の鞍点の存在定理, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2010年9月1日, 京都大学数理解析研究所.

㉓ 安藤圭太, 閉凸錐で定義された弱有効解集合上での最適化に対する内部近似法, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2010年9月1日, 京都大学数理解析研究所.

㉔ 山田修司, DC 計画問題に対する内部近似法, 第54回システム制御情報学会研究発表講演会, 2010年5月21日, 京都府京都市, 京都リサーチパーク.

㉕ Tamaki Tanaka, Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps, International Symposium2010: Nonlinear Analysis and Optimization, 2010年2月5日, 韓国釜山市, 国立釜慶大学校.

㉖ Tamaki Tanaka, On nonlinear scalarizing functions for set-valued maps, Abstract Harmonic Analysis 2009, 2009年12月19日, 台湾高雄市, 国立中山大学.

㉗ 鷺尾 哲, DEAにおける実現可能性を考慮した効率測定, 第52回自動制御連合講演会, 2009年11月22日, 大阪大学.

㉘ 田中 環, ベクトル空間における集合のスカラー化数値計算法について, 第52回自動制御連合講演会, 2009年11月21日, 大阪大学.

㉙ 山田修司, リプシッツ最適化問題に対する頂点間の連結関係を用いた内部近似法, 第52回自動制御連合講演会, 2009年11月21日, 大阪大学.

⑳ 田中 環, ベクトル空間における集合のスカラー化数値計算法について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 2009年9月10日, 長崎大学.

㉑ 山田修司, リプシッツ最適化問題に対する切除平面法を導入した内部近似法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 2009年9月10日, 長崎大学.

㉒ 鷺尾 哲, DEAにおいて実現可能性を考慮した改善指標, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2009年9月2日, 京都大学数理解析研究所.

㉓ 孫田祐哉, 集合に対する統一的なスカラー化関数の性質といくつかの例, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2009年9月2日, 京都大学数理解析研究所.

㉔ 桑野一成, Unified scalarization for sets in set-valued optimization, 「非線形解析学と凸解析学の研究」研究集会, 2009年9月2日, 京都大学数理解析研究所.

㉕ Tamaki Tanaka, Inherited properties of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps, The 9th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, 2009年7月18日, 台湾彰化市, 国立彰化師範大学.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中 環 (TANAKA TAMAKI)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 10207110

### (2) 研究分担者

磯貝 英一 (ISOGAI EIICHI)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 40108014

山田 修司 (YAMADA SYUUJI)  
新潟大学・自然科学系・准教授  
研究者番号: 80331544

### (3) 連携研究者

谷野 哲三 (TANINO TETSUZO)  
大阪大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号: 50125605

黒岩 大史 (KUROIWA DAISHI)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号: 40284020