

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月10日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2009 ~ 2012

課題番号：21540124

研究課題名（和文） 無限次元力学系における分岐とホモ/ヘテロクリニック挙動

研究課題名（英文） Bifurcations and Homo- and Heteroclinic Behavior in Infinite-Dimensional Dynamical Systems

研究代表者

矢ヶ崎 一幸 (Kazuyuki Yagasaki)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：40200472

研究成果の概要（和文）：解析的および数値的な手法を用いて、偏微分方程式系や離散格子系などの、さまざまな無限次元力学系において起こる分岐現象およびホモ/ヘテロクリニック挙動を明らかにした。特に、偏微分方程式系のソリトンやパルス解、フロント解に対応した、常微分方程式系のホモ/ヘテロクリニック軌道に対して、サドル・ノードおよびピッチフォーク分岐が起こる条件を求めるための摂動的な方法を開発し、その軌道まわりの変分方程式の微分ガロア理論の意味での可積分性との関連を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Bifurcations and homo- and heteroclinic motions in several infinite-dimensional dynamical systems such as partial differential equations and discrete lattices were studied. In particular, perturbation methods to obtain conditions for saddle-node and pitchfork bifurcations of homo- and heteroclinic orbits in ordinary differential equations, which correspond to soliton, pulse and front solutions in partial differential equations, were developed, and their relationship with the integrability of variational equations around these orbits in the meaning of differential Galois theory was described.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：力学系

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：力学系、無限次元系、分岐、ホモ/ヘテロクリニック挙動、摂動法、微分ガロア理論、数値解析

## 1. 研究開始当初の背景

力学系理論の発展は目覚しく、低次元力学系における分岐やカオスなどの非線形現象の理解は飛躍的に進んでいる。しかしながら、偏微分方程式系や離散格子系などの無限次

元力学系に対しては、力学系理論によるアプローチの有効性は容易に認識されるものの、いまだ多くの課題が残されている。例えば、カオスのような複雑なダイナミクスを理解する上で安定/不安定多様体の挙動を明らか

にすることが有用であるが、その解析的な取り扱いはごく限られた場合に対してのみ可能であり、多くの場合は数値的な方法に頼らざるを得ない。また、従来の数値的な方法では、高々4次元力学系の2次元安定/不安定多様体を計算できる程度であり、通常の数値解析のように有限次元力学系によって近似したとしても、無限次元力学系における安定/不安定多様体を精度良く計算することはほとんど絶望的であった。

## 2. 研究の目的

解析的および数値的な手法を用いて、偏微分方程式系や離散格子系などの、さまざまな無限次元力学系において起こる分岐現象およびホモ/ヘテロクリニック挙動を明らかにする。より具体的には、偏微分方程式系におけるパルス解の分岐に対する解析手法を開発し、偏微分方程式系の精度保証付き数値分岐解析法を確立し、さらに離散格子系を含む無限次元系におけるホモ/ヘテロクリニック挙動を解析的あるいは数値的に解明することを目的とする。

## 3. 研究の方法

(1) 偏微分方程式系や離散格子系などの無限次元力学系において起こる分岐現象およびホモ/ヘテロクリニック挙動を明らかにする第一歩として、空間1次元の偏微分方程式系におけるソリトンやパルス解、フロント解の分岐現象を解析する。この目的のため、これらの解に対応した、常微分方程式系のサドル型平衡点に対するホモ/ヘテロクリニック軌道に対して、メルニコフの方法を拡張し、適用することにより、それらの軌道まわりの変分方程式が2個の独立で有界な解を有するとき、そのサドル・ノードおよびピッチフォーク分岐がある非退化条件の下で起こることを証明する。さらに、常微分方程式系の次元が4の場合に対して、2個の独立で有界な解が存在するとき、その変分方程式が微分ガロア理論の意味で可積分となることを証明する。また、ソリトンやパルス解、フロント解の線形安定性を判定する際に現れるストゥルム・リウビル問題を取りあげ、解が存在するとき、与えられた方程式が微分ガロア理論の意味で可積分となることを示す。

(2) 可逆的な常微分方程式系におけるサドル型あるいはサドル・センター型平衡点のホモ/ヘテロクリニック軌道によって与えられる、空間1次元偏微分方程式系のパルス解・フロント解に対して、サドル・ノードおよびピッチフォーク分岐が起こる条件を、メルニコフの方法を拡張し、“埋め込まれた”ソリトンの存在を証明する研究代表者らの手法のアイデアをさらに拡張して求める。また、

微分ガロア理論を用いて、これらの分岐の起こる条件について論じる。

(3) エノン・ハイレズ系や古典力学の三体問題の特別な場合である二等辺三体問題など、多くの可逆的な常微分方程式系では、空間1次元偏微分方程式系の定常解に対応した、周期解の1パラメータ族が存在する。このような周期軌道族の分岐に対する摂動的な方法を開発し、対応した偏微分方程式系の定常解の分岐を解析する。また、エノン・ハイレズ系や二等辺三体問題に対して、この現象を数値的に確認する。

(4)  $n$ 次元球領域における( $n$ は自然数)、ある反応拡散方程式のノイマン境界値問題を取りあげ、中心にピークをもつ定常パルス正值解の分岐について理論的研究を行う。この反応拡散方程式は生物の走行性のモデルであるケラー・ジエグル方程式や、生物の形態形成のモデルであるギエラー・マインハルト方程式を解析する上でも重要なものである。

(5) 力学系のダイナミクスを理解する上だけでなく、分岐解析を行う上でも重要な役割を果たす中心多様体に対して、ある偏微分方程式系を数値的に解くことにより求めるといった数値計算法を提案する。さらに、無限次元力学系を有限次元系で近似して周期軌道のホモ/ヘテロクリニック挙動を求める際に必要となる、高次元写像の安定/不安定多様体の数値計算法を開発する。

(6) (1)から(5)で用いられたものと類似の理論的および数値的アプローチを用いて、重力の作用するコマや一様磁場中の伸縮可能な無限に長い弾性棒、周期構造が付加された非線形光ファイバー中のソリトンについても解析を行う。

## 4. 研究成果

(1) 空間1次元偏微分方程式系におけるソリトンやパルス解、フロント解に対応した、常微分方程式系のサドル型平衡点に対するホモ/ヘテロクリニック軌道に対して、それらの軌道まわりの変分方程式が2個の独立で有界な解を有するとき、そのサドル・ノードおよびピッチフォーク分岐がある非退化条件の下で起こることを証明した。さらに、常微分方程式系の次元が4の場合に対して、2個の独立で有界な解が存在するならば、その変分方程式が微分ガロア理論の意味で可積分となることを証明した。また、ソリトンやパルス解、フロント解の線形安定性を判定する際に現れるストゥルム・リウビル問題に対して、その解が存在するとき、与えられた方程式が微分ガロア理論の意味で可積分と

なることを証明した。これにより、本理論が適用可能な場合には、線形安定性を決定するための固有値を容易に計算することができる。これらの理論結果に対して具体的な適用例を示し、有効性を明らかにした。

(2) 可逆的な常微分方程式系におけるサドル型あるいはサドル・センター型平衡点のホモ/ヘテロクリニック軌道によって与えられる、空間1次元偏微分方程式系のパルス解・フロント解に対して、サドル・ノードおよびピッチフォーク分岐が起こる条件を求めた。また、微分ガロア理論によりその分岐の起こる条件について論じ、それらの軌道まわりの変分方程式の可積分性との関連を明らかにした。得られた結果を非線形光ファイバーのモデルに適用し、その有効性を示した。

(3) 偏微分方程式系の定常解に対応する、可逆的な常微分方程式系の周期解の1パラメータ族の分岐に対する摂動的な方法を開発した。ホモクリニック軌道の分岐とは異なり、周期軌道の変分方程式の可積分性との関連性はないものの、パラメータの稠密な値において周期軌道の分岐が一般的に起こることを明らかにした。このような現象は可逆性をもたない他のクラスの微分方程式系では起こらないものである。さらに、エノン・ハイレス系や二等辺三体問題に対して、この現象を数値的に確認した。本手法を二等辺三体問題に適用して、三体問題において円周オイラー解と呼ばれる周期軌道から無限個の相対周期軌道族が分岐し発生することを数学的に証明すると共に、他の摂動法により得られている、ハミルトン系に対する古典的な結果との関連性を明かにすることを計画している。

(4)  $n$  次元球領域における ( $n$  は自然数)、ある反応拡散方程式のノイマン境界値問題に対して、中心にピークをもつ定常パルス正值解の分岐について理論的研究を行った。特に、任意の  $n \geq 2$  の場合にこのような解が自明解からトランスクリティカル分岐により発生し、その後サドル・ノード分岐が起こることを証明し、また、 $n=1$  の場合には定常パルス正值解の完全な分岐構造を決定した。これらの結果により、生物の走行性のモデルであるケラー・ジエール方程式や、生物の形態形成のモデルであるギエラー・マインハルト方程式の定常解の基本的な分岐構造が明らかとなった。

(5) ある偏微分方程式系を数値的に解くことにより、力学系の中心多様体を求めるという数値計算法を提案した。さらに、高次元写像の安定/不安定多様体の数値計算法を開発し

た。これらの結果に対して具体的な適用例を示し、数値解析結果を与え、有効性を明らかにした。

(6) 理論的および数値的アプローチを用いて、重力の作用するコマや一様磁場中の伸縮可能な無限に長い弾性棒、周期構造が付加された非線形光ファイバー中のソリトンについて解析を行った。特に、コマの問題ではこれまで不備のあったカオス存在の証明を与え、一様磁場中の伸縮可能な無限に長い弾性棒がカオス的な形状に変形することや非線形光ファイバーに周期構造が付加されることによって、存在しなかった帯域にソリトン波が新たに発生することを明らかにした。

(7) 本研究で得られた成果を総括し、無限次元力学系の分岐およびホモ/ヘテロクリニック挙動に関して重要な知見を得た。また、無限次元力学系の非線形現象に対する解析的および数値的手法の確立に貢献した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

1. K. Yagasaki, Monotonicity of the period function for  $u'' - u + u^p = 0$  with  $p \in \mathbb{R}$  and  $p > 1$ , Journal of Differential Equations, 査読有, in press
2. K. Yagasaki, Application of the subharmonic Melnikov method to piecewise-smooth systems, Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 査読有, 33, 2013, 2189-2209
3. K. Yagasaki, Bifurcations from one-parameter families of symmetric periodic orbits in reversible systems, Nonlinearity, 査読有, 26, 2013, 1345-1360
4. G. H. M. van der Heijden and K. Yagasaki, Horseshoes for the nearly symmetric heavy top, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 査読有, in press
5. Y. Miyamoto and K. Yagasaki, Monotonicity of the first eigenvalue and the global bifurcation diagram for the branch of interior peak solutions, Journal of Differential Equations, 査読有, 254, 2013, 342-367
6. D. Blazquez-Sanz and K. Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits I: Saddle equilibria, Journal of Differential Equations, 査読有, 253, 2012, 2916-2950
7. D. Blazquez-Sanz and K. Yagasaki, Galoisian approach for a Sturm-Liouville

problem on the infinite interval, *Methods and Applications of Analysis*, 査読有, 19, 2012, 267-288

8. B. A. Malomed, T. Wagenknecht and K. Yagasaki, Families of solitons in Bragg supergratings, *Physica D*, 査読有, 241, 2012, 1043-1058

9. M. Shibayama and K. Yagasaki, Families of symmetric relative periodic orbits originating from the circular Euler solution in the isosceles three-body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 査読有, 110, 2011, 53-70

10. G. H. M. van der Heijden and K. Yagasaki, Nonintegrability of an extensible conducting rod in a uniform magnetic field, *Journal of Physics A*, 査読有, 44, 2011, 495101

11. M. Shibayama, Non-integrability of the collinear three-body problem, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, 査読有, 30, 2011, 299-312

12. M. Shibayama, Minimizing periodic orbits with regularizable collisions in the n-body problem, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 査読有, 199, 2011, 821-841

13. H. Ito, Birkhoff normalization and superintegrability of Hamiltonian systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 査読有, 29, 2009, 1853-1880

14. M. Shibayama, Free-fall and heteroclinic orbits to triple collisions in the isosceles three-body problem, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 査読有, 49, 2009, 735-746

15. M. Shibayama, Existence and stability of periodic solutions in the isosceles three-body problem, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 査読有, B13, 2009, 141-155

[学会発表] (計 46 件)

1. 矢ヶ崎一幸, 不規則な摂動を受ける力学系における Melnikov 過程とカオス, 力学系の応用研究会, 2013 年 3 月 26 日~27 日, 早稲田大学

2. 矢ヶ崎一幸, 非対称コマにおける馬蹄力学の存在, 日本数学会 2013 年度年会, 2013 年 3 月 20 日~23 日, 京都大学

3. 宮本安人, 矢ヶ崎一幸, 球領域における Neumann 問題の内部ピーク解の分岐図式と第 1 固有値の単調性について, 日本数学会 2013 年度年会, 2013 年 3 月 20 日~23 日, 京都大学

4. 矢ヶ崎一幸, 不規則な摂動を受ける力学系における Melnikov 過程とカオス, RIMS 研

究集会「偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的な現象の解析」, 2013 年 2 月 13 日~15 日, 京都大学

5. 矢ヶ崎一幸,  $u'' - u + u^p = 0$  ( $p > 1$  は実数) における周期関数の単調性, 2012 年度冬の力学系研究集会, 2013 年 1 月 11 日~14 日, 日本大学軽井沢研修所

6. 矢ヶ崎一幸, Computation and control of low energy Earth-to-Moon transfers with moderate flight time, 天体力学 N 体力学研究会 2012, 2012 年 10 月 26 日~27 日, 千葉市美術館

7. 矢ヶ崎一幸, あるクラスの反応拡散方程式に対する Neumann 境界値問題の定常解の分岐, RIMS 研究集会「力学系とその周辺分野の研究」, 2012 年 7 月 9 日~13 日, 京都大学

8. M. Shibayama, Non-integrability criterion for homogeneous Hamiltonian systems via blowing-up theory of singularities, Workshop on Variational Methods in N-Body and Vortex Dynamics, May 28-June 8, 2012, Università di Lence, Italy

9. 矢ヶ崎一幸, Families of solitons in Bragg supergrating, 北陸応用数理研究会 2012, 2012 年 2 月 17 日~19 日, 金沢大学

10. M. Shibayama, Variational approach to the n-body problem, Emerging Topic on Differential Equations and Their Applications, December 5-9, 2011, Nankai University, China

11. K. Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits in reversible systems, RIMS 研究集会: 力学系とトポロジーのフロンティア, 2011 年 11 月 21 日~25 日, 京都大学

12. 矢ヶ崎一幸, ホモクリニック軌道の分岐に対する解析および代数的条件, 広島微分方程式研究会, 2011 年 10 月 7 日~8 日, 広島大学

13. K. Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits in reversible systems, The 4th MSJ-SI Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, September 12-21, 2011, Kyushu University

14. M. Shibayama, Variational approach to the n-body problem, The 4th MSJ-SI Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, September 12-21, 2011, Kyushu University

15. 矢ヶ崎一幸, Families of symmetric relative periodic orbits originating from the circular Euler solution in the isosceles three-body problem, 天体力学 N 体力学研究会 2011, 2011 年 9 月 1 日~2 日, 大阪大学

16. K. Yagasaki, Some applications of dif-

ferential Galois theory in dynamical systems, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, May 22-26, 2011, Snowbird Ski and Summer Resort, USA

17. 矢ヶ崎一幸, 力学系における微分ガロア理論の新たな応用, 第10回盛岡応用数学小研究集会, 2010年11月6日-7日, 岩手大学

18. 矢ヶ崎一幸, 非対称コマにおける馬蹄力学の存在, RIMS研究集会「力学系—理論から応用へ, 応用から理論へ—」, 2010年9月27日-30日, 京都大学

19. 矢ヶ崎一幸, D. Blazquez-Sanz, ホモクリニック軌道の分岐に対する解析のおよび代数的条件, 日本数学会 2010年度秋季総合分科会, 2010年9月22日-25日, 名古屋大学

20. H. Ito, Non-commutatively integrable vector fields and their normal forms at singular points, Recent Developments in Resurgence Theory and Related Topics, June 27-July 2, 2010, Kansai Seminar House

21. M. Shibayama, A variational proof of the existence of Gerver's super-eight orbit in the four-body problem, UPC Integrability Seminar 2010, June 7-8, 2010, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain

22. K. Yagasaki, Joint SIAM/RSME-SCM-SEMA Meeting Emerging Topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations DSPDEs'10, May 31-June 4, 2010, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain

23. 矢ヶ崎一幸, New applications of differential Galois theory in dynamical systems, 機械工学における力学系理論の応用に関する研究会, 2010年3月28日-30日, 慶応大学

24. 矢ヶ崎一幸, コンピュータソフトウエア AUTO による, 周期軌道および安定/不安定多様体, ホモ/ヘテロクリニック軌道の数値計算, 天体力学N体力学研究会・ちばN体 2010, 2010年3月19日-20日, 千葉大学

25. 矢ヶ崎一幸, 分数調波軌道に対するメルニコフの方法とその区分線形系への応用, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 2010年1月21日-22日, 飛騨・高山「煥章館」

26. 矢ヶ崎一幸, Galoisian conditions for bifurcations of homoclinic orbits to saddle equilibria, 2009年度冬の力学系研究集会, 2010年1月8日-11日, 東京工業大学

27. K. Yagasaki, Subharmonic Melnikov method and its application to bi- and tri-linear oscillators, Research Workshop on Bifurcations in Oscillators with Elastic and Impact Constraints, November 4-6, 2009, Imperial College London, UK

28. 矢ヶ崎一幸, Reversible系における周期軌道族の分岐, 日本数学会 2009年度秋季総合分科会, 2009年9月24日-27日, 大阪大学

29. 矢ヶ崎一幸, 二等辺三体問題におけるオイラー解の分岐: 理論的アプローチと数値的例証, 第3回「ハミルトン系とその周辺」小研究会, 2009年8月31日-9月1日, 新潟大学

30. 矢ヶ崎一幸, Bifurcations from one-parameter families of periodic orbits in reversible systems, RIMS研究集会「力学系—双曲型力学系から大自由度力学系へ—」, 2009年8月17日-8月22日, 京都大学

31. K. Yagasaki, Heteroclinic connections between triple collisions and relative periodic orbits in the isosceles three-body problem, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, May 17-21, 2009, Snowbird Ski and Summer Resort, USA

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

矢ヶ崎 一幸 (Kazuyuki Yagasaki)

研究者番号: 40200472

広島大学・大学院理学研究科・教授

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

伊藤 秀一 (Hidekazu Ito)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号: 90159905

柴山 允瑠 (Mitsuru Shibayama)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・講師

研究者番号: 40467444