様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月２８日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：２１５４０１２８
研究課題名（和文）　実数の集合論における商構造

研究課題名（英文）　Quotient structures in set theory of the reals

研究代表者
Brendle Jorg（BRENDLE JÖRG）
神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授
研究者番号：７０３０１８５１

研究成果の概要（和文）：連続体とその部分集合を組合せ論的集合論や記述集合論の観点から調べた。特に、独立性証明を行う際の主要な集合論的な技法である強制法などの手法を用いることによって、自然数全体の集合ωのベキ集合P(ω)を自然数上の定義可能なイデアル I で割った商集合であるブール代数P(ω)/I などの、集合論における商構造の組合せ論的性質に焦点を絞って研究を行った。

研究成果の概要（英文）：We investigated the continuum and its subsets from the point of view of combinatorial and descriptive set theory. In particular, using forcing theory, which is the main method for obtaining independence results in set theory, and other techniques, we focused on combinatorial properties of quotient structures in set theory, like Boolean algebras of the form P(ω)/I where I is a definable ideal on the power set P(ω) of the natural numbers ω.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２０１１年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：集合論
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：数学基礎論、集合論、トポロジー、測度論、強制法の理論、組合せ論的集合論、記述集合論

１．研究開始当初の背景
自然数全体の集合 ω のベキ集合 P(ω) を有限集合で割った商集合であるブール代数 P(ω)/fin の組合せ論的性質は、数十年間にわたって積極的に調べられてきている。特に、P(ω)/fin の自己同形群の構造のほかに、最小の非可算基数 ω_1 と連続体の濃度 c の間の値を取り得るものである***連続体の基数不変量***、また***ギャップ***や***ほとんど交わりがない集合族***などの P(ω)/fin の構造を記述する組合せ論的な対象に焦点が絞られて研究が行われてきている。この研究は、P(ω)/fin によって表現される実数全体をより深く理解させるだけでなく、強制法の理論における新しい結果を導いており、一般位相幾何学、群論や関数解析などの純粋数学の他分野へ多数の応用を与えているため、集合論において重要な位置を占めている。

近年は、自然数上の定義可能なイデアル I で P(ω) を割った商集合であるブール代数 P(ω)/I のような、P(ω)/fin とよく似た商構造について、P(ω)/fin と同類の観点からの集合論において重要な役割を果たしている研究が行われてきている。ここで、I が***定義可能***であるとは、実数全体 P(ω) の部分集合としてボレル集合または解析的集合などであるときをいう。例えば、Farah は異なる解析的商の間の準同形とそれらの商におけるギャップのスペクトルを調べており（*Analytic Quotients*, Mem. Amer. Math Soc. **702** (2000))、また、Calkin 代数 C(H) の全ての自己同形が内部自己同形となることが open coloring axiom から導かれることを最近証明した。さらに、本研究者は有理数 Q の稠密な部分集合全体を全疎な部分集合全体からなるイデアルで割った商 Dense(Q)/nwd などのいくつかの商の distributivity number の間の順序関係についての独立性証明を行った（*Independence for distributivity numbers*, in: Algebra, Logic, Set Theory. Festschrift für Ulrich Felgner zum 65. Geburtstag (B. Löwe, ed.), Studies in Logic (College Publications), vol. 4 (2007), 63-84)。

２．研究の目的

この研究の目的は、 自然数全体の集合 ω のベキ集合 P(ω) を自然数上の定義可能なイデアル I で割った商集合であるブール代数 P(ω)/I などの、集合論における商構造を組合せ論的集合論や強制法の理論の観点から組織的かつ詳細に調べることであった。例えば、下記の具体的なテーマについて研究することは本研究計画の目的であった。

(1) F_σ-イデアルとそれらの商。I が総和可能イデアルのように F_σ-イデアルとなるとき、P(ω)/I は強制法として実数を付け加えない σ-閉構造であり、自然数上の極大フィルターを付加する。つまり、強制法に関して P(ω)/fin と同様な性質をもつが、その類似の度合を理解することは本研究の重要な目的の一つであった（研究成果 (1) と (2) を参照)。

(2) F_σでない解析的イデアルとそれらの商。密度ゼロイデアルのような F_σ でない定義可能なイデアル I に対して、 Hernández と Hrušák によって導入された基数不変量（*Cardinal invariants of analytic P-ideals*, Canad. J. Math. **59** (2007), 575-595) を用いて表現される I の組合せ論的構造について、いくつかの重要な問題を解決することも本研究の目的であった(研究成果 (5) と (6) を参照)。

(3) 商構造におけるほとんど交わりがない集合族。P(ω)/I を強制法の観点から調べるとき、その商構造における極大なほとんど交わりがない集合族（maximal almost disjoint families）が強制法の極大反鎖として重要な役割を果たしている。これらのほとんど交わりがない集合族をさらに深く理解することは本研究のもう一つの目的であった（研究成果 (3) と (7) を参照)。

３．研究の方法

本研究では、強制法の理論をはじめ、記述集合論、組合せ論的集合論、トポロジーや測度論などの数学の分野の最先端の技法を用いることのよって、実数の集合論における商構造についてのいくつかの問題を解決した。特に、無矛盾性証明を行うために最新の強制法の様々な手法を使った。例えば、splitting number について独立性結果を得る際に重要な役割を果たしている、フィルターに対応する Laver 強制法（研究成果 (1) と (8) を参照）及び Mathias 強制法（研究成果 (3) を参照)、強制法の行列型の反復法（matrix iteration）及び可測基数上の極大フィルターによる強制法の超ベキ（ultrapower of a forcing notion)（研究成果 (3) を参照)、クリーチャー強制法（creature forcing）及び Mathias のモデル（研究成果 (4) を参照)、Hechler のモデル（研究成果 (7) を参照）などの方法論的に洗練された技術を用いた。

実数の集合論に関する組合せ論的集合論や記述集合論については世界的に研究が行われているため、海外の研究者との意見交換や討論、特に共同研究は必要不可欠であった。研究成果の多くは、Michael Hrušák、Paul Larson、Benedikt Löwe、Yurii Khomskii、Vera Fischer、 Jana Flašková や Diana Montoya らとのディスカッションや共同研究により得られた。また、研究代表者は研究集会及び国際会議に招待された際、様々な研究者と意見交換を行った。

(1) 主な研究打合せは下記通りであった。

① 2009 年 4 月 1 日〜9 月 25 日:ボン大学（ドイツ）でサバティカル。Yurii Khomskii、Vera Fischer や Jana Flašková はボン大学を訪問した。下記の (3)、(4) と (5) についての

共同研究。
② 2009年5月25日～29日、2010年2月14日～19日、5月28日～6月7日、2011年3月25日～4月6日：ILLC（アムステルダム大学、オランダ）。Benedikt Löwe との議論。下記の (4) と (7) についての Yurii Khomskii との共同研究。
③ 2009年10月20日～12月18日：Paul Larson は日本学術振興会の外国人招へい研究者として神戸大学を訪問した。発表論文⑤を書いた。
④ 2009年10月15日～11月19日、2011年1月23日～2月3日：Yurii Khomskii は神戸大学を訪問した。下記の (4) と (7) についての共同研究。
⑤ 2010年2月21日～3月25日：Diana Montoya は神戸大学を訪問した。共同研究で下記の研究成果 (6) を得た。
⑥ 2010年9月10日～10月2日：UNAM（モレリア、メキシコ）とコリマ大学（メキシコ）。Michael Hrušák とフレシェ群の集合論的な局面についての意見交換。
⑦ 2011年8月31日～9月21日：バルセロナ大学（スペイン）と KGRC（ウィーン大学、オーストリア）。Joan Bagaria、Jakob Kellner や Vera Fischer などの研究者との意見交換。

(2) 代表者は下記の海外での主な国際会議及び研究集会へ招待され、様々な研究者と意見交換や議論を行った。
① 2009年6月15日～26日：研究集会「ESI workshop on large cardinals and descriptive set theory」、ウィーン（オーストリア）。Michael Hrušák、Yurii Khomskii、Vera Fischer や Jana Flašková らとの意見交換。
② 2010年1月30日～2月6日：研究集会「38th Winter School on Abstract Analysis, Section of Topology」、ヘイニツェ（チェコ）。Michael Hrušák、Yurii Khomskii や Jana Flašková らとの意見交換。
③ 2010年10月4日～8日：研究集会「11th International Workshop in Set Theory」、マルセイユ（フランス）。
④ 2011年1月9日～15日：研究集会「Oberwolfach Workshop on Set Theory」、オーバーウォルファッハ（ドイツ）。Michael Hrušák、Paul Larson、Yurii Khomskii や Dilip Raghavan らとの意見交換。
⑤ 2011年12月12日～21日：国際会議「12th Asian Logic Conference」、ウェリントン（ニュージーランド）。

(3) 本研究者は、2012年1月23日～28日まで神戸大学で開催された研究集会「Forcing in Set Theory」（日本学術振興会の二国間交流事業・オーストリアとのセミナー）でオーガナイザーの一人であった。

４．研究成果
自然数 ω のベキ集合 P(ω) を定義可能なイデアル I で割ったブール代数 P(ω)/I のような、P(ω)/fin とよく似た構造の組合せ論的性質を調べた。特に、強制法の理論などの集合論の最新の技術を用いることによって、解析的商の強制法としての構造、また、その解析的商に関連する基数不変量、ギャップ、極大なほとんど交わりがない集合族 (maximal almost disjoint families) や極大フィルターなどに焦点を絞って研究を行った。さらに、射影的階層の低いレベルにおける可測性や極大なほとんど交わりがない集合族の存在についても結果を得た。主な研究成果は下記通りである。

(1) 解析的商の基数不変量（Cardinal invariants of analytic quotients）。定義可能なイデアルの重要なクラスの一つをなす F_σ-イデアルで割った商の組合せ論的構造を説明する基数不変量について研究を行うことで、それらの基数不変量の間の大小関係についていくつかの結果を得た。また、強制法を用いることによって、大小関係が証明できないことを意味するいくつかの独立性結果も示した。その結果の一部は P(ω)/fin に関する古典的な結果の自然な一般化になっている。例えば、F_σ-イデアルは、自然数上の下半連続劣測度 φ を用いて、その劣測度有限な集合族 Fin(φ) として表現されるが、この表現を用いて、全ての F_σ-イデアル I に対して「I の splitting number が dominating number 以下である」、「I の splitting number が dominating number より真に小さいことが無矛盾である」などの主張を証明した。また、F_σ P-イデアル I に対して I の almost disjointness number が bounding number 以上であることが既に知られていたが、ED_{fin} を平面における恒等関数以下の関数から生成されるイデアルとするとき、「ED_{fin} の almost disjointness number が bounding number より真に小さい」ことが Hechler モデルにおいて成り立つことを示すことによって、これは一般的な F_σ-イデアルに対して成り立たないことが分かった。さらに、「P(ω)/fin と P(ω)/I の基数不変量がどのように比較できるか？」のような問題を通じてそれらの構造の相互関係をより深く理解した。例えば、強制法の洗練された行列型の反復法を用いることで、任意の稠密な総和可能イデアル I_f に対して、「I_f の splitting number が古典的な splitting

number より真に小さい」ことの無矛盾性を証明した。また、「ED_{fin} の distributivity number が古典的な distributivity number より真に小さい」ことが無矛盾であることを示すことによって、$P(\omega)/ED_{fin}$ が P(ω)/fin に強制法として完備に埋め込まれないことが得られた。*Cardinal invariants of analytic quotients* としてまとめて出版される予定である（学会発表⑥と⑩を参照)。

(2) Rothberger のギャップ（Rothberger gaps)。解析的な P-イデアル I に対して、商構造 P(ω)/I において（κ, ω)-Rothberger のギャップが存在するような最小の κ が unbounding number と等しくなることが既に知られていたが、これは一般的な解析的なイデアルに対して成り立たないことがわかった。特に、F_σ-商構造である $P(\omega)/ED_{fin}$ において（ω_1, ω)-Rothberger のギャップが ZFC のもとで存在することを証明した。この研究は上記の (1) の研究と密接に関連している（学会発表⑤と⑦を参照)。

(3) 連続体の大きいモデル（Models with large continuum)。Vera Fischer（Kurt Gödel Research Center、ウィーン大学、オーストリア）との共同研究で、連続体の濃度が ω_2 より大きい文脈において、古典的な基数不変量の可能な値を調べた。特に、Blass と Shelah によって導入された***行列型の反復法***（***matrix iteration***）を洗練することで、任意の非可算の正則基数 κ < λ に対して、「unbounding number = almost disjointness number = κ かつ splitting number = λ である」ことの無矛盾性を証明した。また、行列型の反復法において、κ より小さい可測基数上の極大フィルターによる***強制法の超ベキ***（***ultrapower of a forcing notion***）という Shelah の技法を繰り返して用いることによって、「unbounding number = κ かつ almost disjointness number = splitting number = λ となる」ようなモデルを構成した（雑誌論文③を参照)。

(4) 射影的階層における偏極した分割性質（Polarized partition properties in the projective hierarchy）。Yurii Khomskii（Institute for Logic, Language and Computation、アムステルダム大学、オランダ）との共同研究で、ベール空間 ω^ω 上の***偏極した分割性質***（***polarized partition property***）と***有界な偏極した分割性質***（***bounded polarized partition property***）を記述集合論の観点から調べ、またそれらの性質を他の可測性の性質と比べた。DiPrisco と Todorčević の結果によって、両方の分割性質が解析的集合について成り立つことは知られている。また、偏極した分割性質がラムズィーの性質（Ramsey property）より弱い。しかし、Mathias のモデルにおいて、「Σ^1_2 ラムズィーの性質が成り立つが、Δ^1_2 有界な偏極した分割性質が成り立たない」ことを証明した。さらに、Shelah によって開発された***クリーチャー強制法***（***creature forcing***）の技法を用いることによって、「Σ^1_2 有界な偏極した分割性質が成り立つが、Δ^1_2 Miller 性質と Δ^1_2 ドーナツ性質（doughnut property）が成り立たない」ことの無矛盾性を得た。特に、このモデルにおいて Δ^1_2 ラムズィーの性質も成り立たない（雑誌論文①を参照)。

(5) 極大フィルターの存在とジェネリック存在（Existence and generic existence of ultrafilters)。本研究の開始の前に始まった、Jana Flašková（西ボヘミア大学、プルゼニ、チェコ）との共同研究を継続することによって、I-極大フィルターの存在とジェネリック存在をさらに深く調べた。例えば、σ-中心化された強制法に対するマーティンの公理 MA(σ-centered) のもてで、密度ゼロ極大フィルターでない離散的極大フィルター（discrete ultrafilter）が存在することを証明した。また、総和可能極大フィルターと密度ゼロ極大フィルターのジェネリック存在を特徴づける基数不変量を古典的な基数不変量と比べ、その基数不変量の大小関係についていくつかの独立性証明を行った。*Generic existence of ultrafilters on the natural numbers* としてまとめて出版される予定である。

(6) 有理数の部分集合に関する base-matrix lemma（A base-matrix lemma for subsets of the rationals)。Diana Montoya（アンデス大学、ボゴタ、コロンビア）との共同研究で、有理数全体の集合 Q のベキ集合 P(Q) を全疎の集合からなるイデアル nwd で割った商構造 P(Q)/nwd を強制法の理論の観点から調べた。特に、強制法の理論における重要な問題である「基数の保存」について研究を行った。成果の概要は次の通りである。Dense(Q) を有理数の稠密な部分集合の全体とし、h(Q) を商構造 Dense(Q)/nwd の distributivity number とする。「P(Q)/nwd が h(Q) 以下の基数を保存し、連続体の濃度 c を h(Q) につぶす」ことを証明するによって、Balcar、Hernández と Hrušák の問題を解いた。この証明の主要な手段として、Balcar、Pelant と Simon の P(ω)/fin に対する古典的な base-tree lemma を P(Q)/nwd に適合させることで、後者の構造に対する base-matrix lemma を示した。しかし、P(Q)/nwd が σ-閉構造でな

いため、この base-matrix lemma の証明が古典的な証明より大分複雑である（雑誌論文②を参照)。

(7) 極大なほとんど交わりがない集合族の複雑さ（Complexity of maximal almost disjoint families）。Yurii Khomskii（Institute for Logic, Language and Computation、アムステルダム大学、オランダ）との共同研究で、ω 上の定義可能なほとんど交わりがない集合族(almost disjoint families)の構成を調べた。特に、Hechler 強制法などの dominating 実数を付け加える強制法とその反復法によって保存される、ω_1 個の完全な(perfect)ほとんど交わりがない集合からなる極大なほとんど交わりがない族(m.a.d. family)が存在することを証明した。つまり、b を unbounding number とし、a(Borel) をその和集合が m.a.d. family となるようなボレルなほとんど交わりがない集合の族の最小の濃度とするとき、a(Borel)<b の無矛盾性を得た。また、この m.a.d. family を構成可能集合のクラス L において構成すると、Σ^1_2 の m.a.d. family の存在が b>ω_1 と無矛盾であることを示すことによって、Friedman と Zdomskyy の問題を解いた。*ω_1-perfect mad families* としてまとめて出版される予定である（学会発表③と④を参照)。

(8) Splitting の局面（Aspects of splitting）。P(ω)/fin における重要な現象である splitting のいくつかの局面と、splitting の偏極した分割関係（polarized partition relations）との相互関係を調べた。集合列 A =〈a_α:α＜ω_1〉⊂ P(ω）が ***tail splitting 列***であるとは、全ての b ∈ P(ω）に対して、ほとんどの a_α が b を split するときにいう。s を splitting number とするとき、tail splitting 列の存在が s＝ω_1 を導く。しかし、「tail splitting 列が存在しないが s＝ω_1 である」という主張が無矛盾であることを反復強制法によって証明した。基数の対κ, λが***強い偏極した分割関係***（***strong polarized partition relation***）を満たすとは、任意のκ×λ上の色付き c に対して、c が A×B 上で一定となるような部分集合 A⊂κ（|A|=κ）と B⊂λ（|B|=λ）が存在することである。対ω_1, ωが強い偏極した分割関係を満たすことは tail splitting 列が存在しないことと同値である。従って、「対ω_1, ωが強い偏極した分割関係を満たすが s＝ω_1 である」という命題の無矛盾性を得ており、Garti と Shelah の問題を解いた。*Aspects of splitting* としてまとめて出版される予定である（学会発表②を参照)。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① <u>Jörg Brendle</u>, Yurii Khomskii, *Polarized partitions on the second level of the projective hierarchy*, Annals of Pure and Applied Logic, to appear. 査読あり

② <u>Jörg Brendle</u>, Diana Montoya, *A base-matrix lemma for sets of rationals modulo nowhere dense sets*, Archive for Mathematical Logic, **51** (2012) 305-317. 査読あり

③ <u>Jörg Brendle</u>, Vera Fischer, *Mad families, splitting families, and large continuum*, The Journal of Symbolic Logic, **76** (2011) 198-208. 査読あり

④ <u>Jörg Brendle</u>, Benedikt Löwe, *Eventually different functions and inaccessible cardinals*, Journal of the Mathematical Society of Japan, **63** (2011) 137-151. 査読あり

⑤ <u>Jörg Brendle</u>, Paul Larson, *Ultrafilter limits of asymptotic density are not universally measurable*, in: Combinatorial set theory and forcing theory (T. Yorioka, ed.), 数理解析研究所講究録, **1686** (2010) 16-18. 査読なし

⑥ <u>Jörg Brendle</u>, Michael Hrušák, *Countable Fréchet Boolean groups: an independence result*, The Journal of Symbolic Logic, **74** (2009) 1061-1068. 査読あり

〔学会発表〕（計 11 件）

① <u>Jörg Brendle</u>, *Cardinal invariants and large continuum*, Amsterdam workshop in set theory, 2012年2月11日, Amsterdam, オランダ

② <u>Jörg Brendle</u>, *Aspects of splitting*, Forcing in Set Theory, 2012 年 1 月 28 日, 神戸, 日本

③ <u>Jörg Brendle</u>, *Mad families constructed from perfect almost disjoint families*, 12th Asian Logic Conference, 2011 年 12 月 16 日, Wellington, ニュージーランド

④ <u>Jörg Brendle</u>, *ω_1-perfect mad families*, Oberwolfach Workshop on Set Theory,

2011年1月10日, Oberwolfach, ドイツ

⑤ <u>Jörg Brendle</u>, *Combinatorics of F_σ quotients*, 11th International Workshop in Set Theory, 2010年10月8日, Luminy, フランス

⑥ <u>Jörg Brendle</u>, *Cardinal invariants of F_σ quotients*, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, 2010年9月28日, Colima, メキシコ

⑦ <u>Jörg Brendle</u>, *An (ω, ω_1)-Rothberger gap*, Amsterdam workshop in set theory, 2010年6月1日, Amsterdam, オランダ

⑧ <u>Jörg Brendle</u>, *Aspects of iterated forcing* (lecture series of 5 talks), 38th Winter School on Abstract Analysis, Section of Topology, 2010年2月1日～5日, Hejnice, チェコ

⑨ <u>Jörg Brendle</u>, *Regularity properties on the second level of the projective hierarchy*, 24th Summer Conference on Topology and Its Applications, 2009年7月17日, Brno, チェコ

⑩ <u>Jörg Brendle</u>, *Cardinal invariants of analytic quotients*, ESI workshop on large cardinals and descriptive set theory, 2009年6月16日, Vienna, オーストリア

⑪ <u>Jörg Brendle</u>, *Dense sets of rationals*, Amsterdam workshop in set theory, 2009年5月26日, Amsterdam, オランダ

〔その他〕
ホームページ：
① 本研究者のホームページ：http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~brendle/index.html
② 神戸大学の集合論のリサーチグループ：http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~brendle/settheory.html
③ 研究集会「Forcing in Set Theory」(神戸大学、2012年1月23日～28日)：http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~brendle/Forcing2012/home.html

６．研究組織
(1)研究代表者

Brendle Jorg (BRENDLE JÖRG)
神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授
研究者番号：７０３０１８５１