様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１７１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１５４０１３３
研究課題名（和文）アルゴリズムの解析としての離散確率モデルの研究

研究課題名（英文）Research on discrete probability models as analysis of algorithms

研究代表者
中田　寿夫（Nakata, Toshio）

福岡教育大学・教育学部・教授

研究者番号：１０３０４６９３
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円、（間接経費）　　1,020,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，アルゴリズムの解析を動機付けとしながらいくつかの離散確率モデルについて調査した。具体的には「衝突のある玉と壷のモデル」「ネックレス過程」「Feller のゲームとその周辺」の3つに関して主に扱い，有限構造と極限分布について研究した。それぞれのモデルに対して，既知の結果を自然に拡張することができ，いくつかの極限定理をえることができた。それにより，モデルのもつ確率的現象が少しは解明されたように思われる。

研究成果の概要（英文）：In this research, motivated by analysis of algorithms, we study discrete probability models. Specifically, they mainly contains three topics, namely, "balls and urns with collisions", "necklace processes", and "Feller game and related topics", and we investigate finite structures and limit distributions. For each discrete probability model, we extend known results, and have some limit theorems. Thereby, it seems that the stochastic phenomena of the models may be just solved.

研究分野：離散確率論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：離散確率モデル　ポアソンの小数の法則　大数の法則　中心極限定理　ネックレス過程　フェラーのゲーム　切断和

１．研究開始当初の背景

離散確率モデルの研究は歴史的には古くから始められ Laplace や Euler の時代まで遡る。

しかしながら，現代数学の流れである抽象化，一般化の観点からは少し取り残されてしまった面もあり，そのことにより国内の数学としての確率論研究においてはそれ自体を研究するものは多いとは言えないように思われる。一方で，国外では，離散確率モデルの研究がアルゴリズムの解析に動機付けられ，計算機科学に応用させるための数学的な研究として注目され，多くの数学者，計算機科学者により研究が進んでいる。例えば，フランスのFlajolet (2011 年に他界)らが国際的に組織するアルゴリズムの解析の研究グループにより，解析的組み合わせ論(analytic combinatorics)という分野の研究が進んだ。この分野の研究の重要な目的の一つとして漸近的な意味で離散構造を調べることが挙げられる。数え上げに関する素朴な組合せ論の研究から始まるが，道具として一般的な意味での「母関数」が用いられ，その扱いが中心的内容となっている。母関数の解析にさまざまな手法がとられているが，たとえば留数解析を巧みに用いた漸近解析など，確率論との親和性も高い。彼らの研究スタイルを意識し，オリジナリティを失わないよう配慮しながら研究分担者や研究協力者の協力を得て多方面からアプローチすることを考えた。

２．研究の目的

はじめに，離散確率モデルに関する正確な確率分布と極限分布の調査を研究の目的とした。そのためモデルが持つ有限構造や他のモデルとの関連性を注意深く調査することを考えた。最終的には，モデルの本質的な部分のみ抽出すべく極限定理を得ることを目指した。

一般には，単純な離散確率モデルですら正確な確率分布の計算を行うことが困難になることが多く，そうでなくともきわめて複雑な形しかえられないことが多い。ところが，一部の有用な離散確率モデルに関しては，組合せ論で用いられる代数的な道具(例えば，行列式，カタラン数，ベル数，第２種スターリング数，等々)により簡潔に表現される場合があり，本研究においてはまずこのようなモデルを扱い，さらにモデルの持つ有限構造のもつ性質を崩さないような一般化を考えた。極限定理に関しては，大数の法則，Poisson の小数の法則，中心極限定理が考えられるが，これらが成立するための条件のチェックや代替の条件の創出が鍵となる。

本研究では，具体的なモデルについて上記のことを考察することにより，確率的な性質を明らかにすることを目標においた。一方で，他のモデルとの関連性を考えたり，複数のモデルの共通の性質を調べたり，統一的な研究を試みることも行った。さらには，これらに付随する関連研究もいくつかできれば良いと思って研究を進めた。

３．研究の方法

本研究の方法として研究の目的に沿うように具体的な離散確率モデルをいくつか調査した。その際，研究分担者や研究協力者に研究のアイデアを聞いてもらい，多方面の視点に立って考察した。一方で，複数のモデルの共通の性質を調べ，統一的な研究を試みた。以下で具体的な離散確率モデルを(1),(2),(3)に分けてそれぞれ述べていく。

(1) 衝突のある玉と壷のモデル：

古典的に知られている玉と壷のモデルに関する衝突に関する問題で以下の問題を考えた：「いくつかの壷を用意し，その壷にいくつかの白玉といくつかの黒玉を投入する。壷の中に白玉と黒玉とが両方とも入る場合を衝突があるということにする。このとき，衝突がある壷の数の分布はどのようになるか?」この問題についての正確な分布の形はやや複雑なものなり，極限定理をえるための有限構造の調査が重要な課題となる。玉の投入確率が一様である場合は，第２種スターリング数を用いて厳密な衝突確率を計算したが(中田(2008))，投入確率が非一様であり対称性が崩れる場合，弱い従属性をもつ指示確率変数を用いて考えた。ここでは投入確率が一様な場合と同様に任意の次数の階乗モーメントを正確に求めるような方法をとった。さらには，Chen-Stein の方法による Poisson 近似の具体的な上限の評価を議論した。

(2) ネックレス過程：

Mallows, Shepp (2008) が提案した問題で設定は以下のとおりである：「1 つの白いビーズと黒いビーズがつながっているところから開始して，以下の方法でビーズを増やしてネックレスを大きくしていく。2 つのビーズの間に新しいビーズを挿入するが，挿入するビーズは両端のビーズの色が黒ならば白を入れ，そうでなければ黒を入れることにする。n 個のビーズから作られるネックレスに挿入するビーズの位置は確率 1/n で選ばれることとする。このとき，白のビーズの割合はどのようになるか?」この問題は母関数を考えて対処することになるが，うまく一般化した上で，自然でなおかつ意味のある極限定理が得られるかが重要な課題となる。このことについて Mallows, Shepp (2008) はネックレス過程の固有の議論を行って母関数の計算を行った。しかしながら，ネックレス過程の有限構造の調査に関しては母関数の持つ細部の情報は本質的なものではないように研究代表者には思われ，実際には Polya の壷の一般的な理論に含まれていることを指摘した。その事により，Mallows, Shepp の行っているネックレス過程の固有のやや複雑な計

算を回避することができる。さらに設定を一般化して議論することが容易になったのでそれを行った。

(3) Feller のゲームとその周辺：
期待値が発散するような離散確率モデルとして「ペテルスブルグのゲーム」と言われている離散確率モデルが知られているが，これは幾何分布を基礎として構成されている。一方で，ペテルスブルグのゲームに対応するモデルとして Feller のゲームがあるが，ランダムウォークの原点の再帰時間を基礎として構成されている。ここでは，ペテルスブルグのゲームの過去の結果と比較しながら Feller のゲームについての性質を調べ，共通点や相違点を調べた。

４．研究成果
研究分担者や研究協力者との討論により，研究の方向性を見極める上での指針について多方面からのアプローチができたように思われる。このことにより，研究論文の中で応用面を意識した表現ができた。
以下では「研究の方法」で挙げた項目(1),(2),(3)に従って研究成果を述べることにする。なお，確率変数列の有限構造の調査研究における副産物として，ある二項等式の確率論的な証明に気付いたので，二項等式等の専門の雑誌に短いノートとして提出した（雑誌論文②)。

(1) 衝突のある玉と壷のモデル：
投入確率が非一様である場合に関して厳密な確率分布の一般形を導くことができたが，解析的に扱うには複雑な形であった。そこで，適切な条件をおくことによりいくつかの極限定理をえることができた。以下の(a)(b)(c)の観点で結果を述べる。(a),(b)に関しては雑誌論文③⑥で報告され，(c)に関しては雑誌論文⑤で報告された。

(a) 確率変数の負の依存性に関して：
衝突するときに定義される指示関数が負の依存性をもつことを利用して結果を得た。このことにより，例えば衝突しない確率の評価を比較的簡単に導くことができた。厳密な確率分布の形から出発して，特性関数（Fourier 変換）を通して極限分布の計算を行えば形式的で複雑なものとなり本質が見えなくなってしまうことがあり，現実的にはある程度の評価だけで十分であることが多い。そういう意味で，負の依存性に関しての結果は計算の簡略化の意味だけとりあげても有用なものであると思われる。

(b) Poisson 近似に関して：
投入確率が非一様な場合でも Poisson 近似されるような条件を整備することができた。ここでは階乗モーメントの収束を示したが，投入確率の非一様性のために直接的な計算が難しい。しかし，これはある多項式に関する重複の項の数え上げの方法を用いて克服することができた。さらには，Chen-Stein の方法による Poisson 近似の具体的な上限の評価も得たが，投入確率が一様の場合と同じようになるので，特に問題なく評価することができた。

(c) Schur 凸性に関して：
投入確率にある種の対称性を仮定して衝突が起こりやすいかどうかを調査することを目的として研究を進めた。古典的な占有問題に関しては分布関数が「Schur 凸」であるという性質を導いて，投入確率と玉の占有についての議論が知られており，これにより，複雑な直接計算を回避することができる。Schur 凸性を示すには「Schur の条件」と言われている不等式を直接示してもよい(実際クーポンコレクタ問題に関する Shur 凸性に関しては，基本的な教科書である Marshall, Olkin, Arnold, Inequalities, Springer,(2011)に研究代表者の未発表論文が私信として記述されている)。一方で，Schur の条件を直接チェックすることなく一般的な定理の系として Schur 凸性が得られることも知られている。つまり，Schur 凸性を保存する積分変換のクラスを定める定理が Proschan, Sethuraman により 1970 年代の後半に発表されており，これにより占有問題の他にも多くの応用例が得られている。この定理を衝突のあるモデルを念頭において，対応する一般的な定理を導いた。得られた結果は Proschan, Sethuraman に現れる積分変換のクラスから自然に対応づけられる定理となった。しかしながら，衝突のある占有問題の一部では定理が適用できたものの，いくつかの場合は Schur 凸性をみたさず，衝突のあるモデルと Schur 凸性はそこまで相性が良いものであるとは言えないことが分かった。

(2) ネックレス過程：
Mallows, Shepp は 2008 年に提案したネックレスの構成に関して，問題固有の詳しい有限構造の議論を行っていた。研究代表者は問題の本質はネックレス構成の際に，グラフとしての構造に本質的に依存しないことに気付いた。そこで，研究代表者は交換可能な確率変数列の研究で知られている Polya の壷の一般論が利用できることを指摘した。それによって，ネックレスを構成する際の決定的なルールを拡張することができ，それに応じた極限定理を導くことができた。実際に，大数の強法則と中心極限定理を調べたが見通しのよい一般論を得ることができたように思われる。これらの内容は，雑誌論文⑦で報告された。

(3) Feller のゲームとその周辺：
Feller のゲームについては，論文雑誌④により報告されたが，それ自身の性質を以下

の(a)で述べる。これは研究代表者の研究室に所属していた大学院生の松本啓佑氏との共同研究である。(b)においてはペテルスブルグのゲームと Feller のゲームの類似点を見出して共通の性質に着目した上で切断和についての極限定理を扱った。結果は，論文雑誌①により報告された。

(a) Feller のゲームの具体的な性質:

Feller のゲームは期待値が存在しないなどペテルスブルグのゲームと同じような性質を持つモデルである。このことにより普通の意味で大数の法則は適用されない。しかし，ペテルスブルグのゲームはパラメータを調節することにより大数の弱法則が知られており，同様の手法を Feller のゲームにも適用できることを示した。

一方で，Feller のゲームがペテルスブルグのゲームと異なる性質をもつことに着目し，裾確率から作られる関数が正則変動であることを指摘した。このことにより，Feller のゲームを自然に一般化した上で正則変動性を用いて安定分布への収束を示した。これはペテルスブルグのゲームでは成り立たない。他にもいくつか極限定理を示すことができた。

(b)切断和についての極限定理：

一般化されたFellerのゲームと一般化されたペテルスブルグのゲームの双方を含むような確率分布のクラスを定め，各要素から作られる独立同分布の確率変数列に対して比較的扱いやすい極限定理を得た。実際に確率変数に対して裾の部分を切断したものを扱ったが，切断の位置は定数ではなく確率変数の和の個数に依存して発散するものを考えた。拡張のないオリジナルのペテルスブルグのゲームの場合，この研究はGyorfi, Kevei (2011)によって研究されているが，ここではその結果を上記の確率分布のクラスまで拡張した。証明に関して言うと，パラメータによる場合わけが必要となるが，モーメントの扱いの簡易化したり，中心極限定理を扱う際にLyapunovの条件を使用することの注意を与えたりしていくつか工夫し，証明の道筋について見通しがよくなり幾分か単純なものになったように思われる。また，その分布のクラスはパレート分布を自然に拡張したものであり，dominated varying という重い裾の分布のクラスとしてよく調べられているクラスの真部分クラスとなっていることが分かった。

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　８　件）

① T. Nakata, Limit theorems for nonnegative independent random variables with truncation, Periodica Mathematica Hungarica, 査読有，掲載決定

② T. Nakata, Another Probabilistic Proof of a Binomial Identity, Fibonacci Quart. 査読有，52 巻，no. 2, 2014, 139-140.
http://www.fq.math.ca/52-2.html

③ T. Nakata, The number of collisions for the occupancy problem with unequal probabilities, Advances in Applied Probability, 査読有, 46 巻, No.1, 2014, 168-185.
doi:10.1239/aap/1396360108

④ K. Matsumoto and T. Nakata, Limit theorems for a generalized Feller game, Journal of Applied Probability, 査読有，50 巻，No. 1, 2013, 54--63.
doi:10.1239/jap/1363784424

⑤ T. Nakata, Integral transforms that preserve Schur convexity with an application to occupancy problem with collisions, Proc. 2011 Second International Conference on Networking and Computing, IEEE computer society CS Digital Library 査読無（招待論文），2011, 352--359.
doi:10.1109/ICNC.2011.69

⑥ T. Nakata, On the number of collisions for the balls-and-urns problem with unequal probabilities, Proc. 7TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON LATTICE PATH COMBINATORICS AND APPLICATIONS, Siena, Italy, 査読有, 2010, 209--212.

⑦ T. Nakata, Necklace processes via Polya urns, Journal of Applied Probability, 査読有, 46巻, No. 1, 2009, 284-295. doi:10.1239/jap/1238592130

⑧ E. Ando, T. Nakata, and M. Yamashita, Approximating the Longest Path Length of a Stochastic DAG by a Normal Distribution in Linear Time, Journal of Discrete Algorithms, 査読有, 7 巻, No. 4, 2009, 420-438.
doi:10.1016/j.jda.2009.01.001

〔学会発表〕（計　９　件）

① 中田寿夫，切断された非負確率変数列に関する極限定理, 日本数学会 2014 年度年会，2014 年 3 月 15 日，学習院大学

② 中田寿夫，切断された非負確率変数列に関する極限定理について，第 130 回 日本数学会九州支部例会，2014 年 2 月 15 日，琉球大学理学部

③ 中田寿夫，期待値の発散するゲームの極限定理について，広島確率論・力学系セミナー，2013 年 11 月 26 日，広島大学理学部

④ 松本啓佑，中田寿夫， 一般化されたフェラーのゲームの極限定理について， 共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」2012 年 11 月 8 日， 統計数理研究所

⑤ T. Nakata, The number of collisions for the occupancy problem, 8th World Congress in Probability and Statistics, 2012 年 7 月 11 日 Grand Cevahir Hotel and Convention Center, Istanbul, Tukey.

⑥ T. Nakata, Integral transforms that preserve Schur convexity with an application to occupancy problem with collisions,（招待講演）, Workshop on Frontiers of Distributed Computing, 2011 年 12 月 1 日，大阪大学コンベンションセンター

⑦ 中田寿夫 壷のモデルとその応用，第 124 回 日本数学会九州支部例会(特別講演)，2011 年 2 月 11 日，福岡教育大学

⑧ T. Nakata, On the number of collisions for the balls-and-urns problem with unequal probabilities, 7TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON LATTICE PATH COMBINATORICS AND APPLICATIONS, 2010 年 7 月 5 日，University of Siena, Italy,

⑨ 中田寿夫，衝突の伴う占有問題におけるポアソン近似，2009 年日本数学会秋季総合分科会， 2009 年 9 月 24 日，大阪大学

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.fukuoka-edu.ac.jp/~nakata/papers/papers.html

６．研究組織
(1)研究代表者
中田 寿夫（NAKATA TOSHIO）
福岡教育大学・教育学部・教授
研究者番号：10304693

(2)研究分担者
玉利 文和（TAMARI FUMIKAZU）
福岡教育大学・教育学部・名誉教授
研究者番号：70036937

(3)連携研究者
久保 泉（KUBO IZUMI）
広島大学・理学研究科・名誉教授
研究者番号：70022621

(4)連携研究者
池田 諭（IKEDA SATOSHI）
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：70282796