

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月15日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540134

研究課題名（和文） 計算機援用証明による微分方程式の解曲線のパラメータ連続的追跡

研究課題名（英文） Enclosures of solution curve of differential equations
by computer-assisted proof

研究代表者

渡部 善隆 (WATANABE YOSHITAKA)

九州大学・情報基盤研究開発センター・准教授

研究者番号：90243972

研究成果の概要（和文）：非線形楕円型境界値問題に対し、解の存在検証とともに存在範囲を局所一意性付きで数学的に厳密に評価する手法を開発した。また、対応する線形化問題から導かれる固有値問題の固有値の非存在証明検証を一般理論として与えた。さらに、構築した手法と陰関数定理との組み合わせによって、非線形偏微分方程式の解曲線をパラメータ連続的に追跡する計算機援用証明手法を導き、実際の問題に適用することでその有効性を確認した。

研究成果の概要（英文）：We developed a computer-assisted theory to verify the existence of the solutions for nonlinear elliptic boundary value problems with local uniqueness. We also proposed verified computations of eigenvalue enclosures for the linearization problems. Finally combining with developed method and the implicit function theorem, we introduced a procedure to enclose solution curves of nonlinear partial differential equations by computer-assisted proof and confirmed its effectiveness by some verified results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：計算機援用証明、精度保証付き数値計算、非線形偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

計算機で実行できる実数値の計算は有限桁の浮動小数点数による近似計算であり、その演算結果には丸め誤差と呼ばれる近似誤差が生じる。近年、浮動小数点演算における丸め誤差を含む演算結果の数学的に厳密な保証が高い精度で効率よく実現できることが明らかにされ、計算結果の信頼性（品質保

証）の問題が応用解析学や計算理工学の分野で広く取り上げられることとなった。さらに、計算結果の品質保証は数値計算アルゴリズムそのものにも影響を与え、様々な数理科学上に現れる問題の解を計算機によって数値的に検証するという方向にまで進展しつつある。この種の数値計算法は計算機援用証明または精度保証付き数値計算法と呼ばれ、理論解析が困難な問題に対する数値的証明とし

て、その意義が国内・国外において高まりつつある。

申請者らはこれまで、解析学に対する計算科学的アプローチとして、主として非線形偏微分方程式に対する計算機援用証明に取り組んできた。これは、計算機により、解の存在する無限次元関数空間の集合を具体的な誤差評価付きで自動的に構成するものであり、これまで理論的な知見が与えられていなかった流れ問題、反応拡散問題、逆問題などの非線形問題の解の存在検証に成功してきた。代表的な成果としてはレイリー・ベナル対流として知られているナヴィエ・ストークス方程式支配下の熱対流問題の研究により、自明解である熱伝導解から遠く離れた様々な非自明解の存在証明を世界で初めて与えた。さらに、二次分岐点の包み込み、およびベナルセルと呼ばれる蜂の巣状のセルの存在検証にも成功した。熱対流問題の研究で得られた検証結果は、流体の性質を規定する無次元数であるレイリー数、ブランドル数、および波数をそれぞれ固定して与えた上で解の存在を証明したものであり、パラメータ連続的な解曲線の存在証明は得られていない。また、このようなパラメータは、熱対流問題に限らず、反応拡散方程式における拡散係数、ナヴィエ・ストークス方程式における粘性係数、対象とする領域のアスペクト比など多くの問題に現れるだけでなく、その非線形性により様々な解の分岐を起こす可能性が報告されている。したがって大域的な解構造の究明のためには、これまでの研究成果の更なる深化・発展が望まれる。申請者は、連携研究者を含む多くの研究者との意見交換を通じて、本研究の目的である非線形偏微分方程式の解に対するパラメータ連続的追跡の計算機援用証明が可能であるとの確信を得るに至った。

2. 研究の目的

本研究は、微分方程式の解曲線をパラメータ連続的に追跡する計算機援用証明手法を構築し、その検証方式を反応拡散方程式、ナヴィエ・ストークス方程式、オーバーバック・ブシネスク方程式などの特に非線形偏微分方程式の境界値問題に適用することにより、これまで解明されていなかった分岐点を包含した解の大域構造を数学的に厳密な意味で明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

本研究では、これまでの研究成果をさらに発展させ、非線形偏微分方程式に対する解曲線

を分岐構造を含む形で連続的に追跡する精度保証付き数値計算アルゴリズムの確立を目指す。また、様々な現象を記述する数理モデルに数値的検証法を適用し計算機援用証明を実現することで、その有効性を実証する。

4. 研究成果

- (1) これまで成功してきた、エムデン方程式、アレン・カーン方程式、コルモゴロフ問題を含むいくつかの非線形楕円型方程式に対する解の局所一意性付き数値的検証手法に対する成果および知見を取り込みながら、非線形偏微分方程式の解に対する局所一意性付き存在検証手法を、可能な限り一般的な関数空間と作用素に適用可能となる検証理論として拡張した。また、理論の構築とあわせて、非線形性の強い特異摂動問題、熱対流問題への適用を視野に入れた精度保証付き数値計算に対するアルゴリズムレベルおよびプログラムレベルの効率化を検討した。その具体的な成果として、平行ポワズイユ流れの安定性を記述する非線形固有値問題の解に対する高精度な局所一意性付き包み込みに成功した。
- (2) 非線形方程式の解をパラメータ連続的に追跡するためには、対応する線形化問題の可逆性の保証が必要であり、多くの問題において可逆性の保証は追跡対象パラメータが対応する固有値問題の固有値でないことの立証と同値であることが明らかとなっている。与えられた集合に含まれるすべての要素が固有値でない（固有値の非存在）ことを検証する汎用的な手法の構築を行った。また、手法の具体的な適用事例として非自己共役複素固有値問題の固有値の除外に取り組み、流体力学的安定性を記述する代表的な方程式であるコルモゴロフ問題およびオーア・ゾンマーフェルト方程式に対する固有値の非存在証明を与えることに成功した。
- (3) これまで得られてきた非線形偏微分方程式の解に対する計算機援用証明手法を、自然境界条件を持つ反応拡散方程式系に対して適用した。具体的には、2次元フィッツフュ・ナグモ型方程式を2重フーリエ級数展開により離散化し、直交射影に対する構成的誤差評価を与えることにより、これまで存

在が確認されていなかった非自明解の存在検証に成功した。また、パラメータ連続的に分岐曲線を追跡する手法に関する数値実験を行った。

- (4) 無限次元Newton法の適用においては、線形化作用素の逆作用素の存在とその効率的なノルム評価が大きな役割を占める。今回、不動点定理と有限次元問題のスペクトルノルムの評価を組み合わせることにより、無限次元の意味での最適値へのオーダーを持つことが期待される逆作用素ノルム評価を与えるアルゴリズムの開発に成功した。また、実際の問題に対して検証アルゴリズムを適用し、従来の方法と比較し、その優位性を精度保証付き数値計算によって明らかにした。
- (5) 問題を不動点定式化した際に、不動点の周りで引き込み性を持つ場合に対する簡便な非線形関数方程式の解の存在検証アルゴリズムを与え、無限次元ニュートン法に基づく解の精度保証方式を補完することに成功した。
- (6) 微分方程式の分岐曲線に対するパラメータ連続的存在検証法の研究に取り組み、パラメータを微小な区間に属する任意の値として連続的に表現することで、その区間に対する解の存在および局所一意性の保証と線形化作用素の可逆性の数値的検証を陰関数定理と併用することにより、解のパラメータ連続的の包み込み手法の定式化を与えた。また、具体的な問題に対する精度保証付き数値計算を行った。さらに、解曲線がターニングポイントを持つ場合のパラメータの踏み換え(ボーダリング)技法を提案する検証法に取り込むことが原理的に可能であることを確認した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

- ① Chuting Cai, Kaori Nagatou, and Yoshitaka Watanabe: A Numerical Verification Method for a System of FitzHugh-Nagumo Type, Numerical Functional Analysis and Optimization, accepted.
- ② 渡部 善隆: 微分方程式の精度保証付き数値計算--逐次反復に基づく計算機援

用証明--, 京都大学数理解析研究所別冊, 掲載決定.

- ③ Yoshitaka Watanabe, Takehiko Kinoshita, and Mitsuhiro T. Nakao: A Posteriori Estimates of Inverse Operators for Boundary Value Problems in Linear Elliptic Partial Differential Equations, Mathematics of Computation, accepted.
- ④ Toshio Sakata, Kazumitsu Maehara, Takeshi Sasaki, Toshio Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Yoshitaka Watanabe, and Makoto Tagami: Tests of Inequivalence Among Absolutely Nonsingular Tensors Through Geometric Invariants, Universal Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 1, No. 1 (January 2012) pp. 1-28.
- ⑤ 渡部 善隆: 精度保証付き数値計算(4)--区間演算と有限次元問題の精度保証--, 応用数理, Vol.21, No.4, pp.57-63, December, 2011.
- ⑥ Nobito Yamamoto, Mitsuhiro T. Nakao, and Yoshitaka Watanabe: A Theorem for Numerical Verification on Local Uniqueness of Solutions to Fixed-Point Equations, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 32, No. 11 (November 2011) pp. 1190-1204.
- ⑦ 渡部 善隆: 精度保証付き数値計算(3)--中尾理論入門--, 応用数理, Vol.21, No.3, pp.47-53, September, 2011.
- ⑧ 渡部 善隆: 精度保証付き数値計算(2)--線形逆作用素のノルム評価--, 応用数理, Vol.21, No.2, pp.54-60, June, 2011.
- ⑨ 渡部 善隆: 精度保証付き数値計算(1)--不動点定式化--, 応用数理, Vol.21, No.1, pp.40-45, March, 2011.
- ⑩ Mitsuhiro T. Nakao, and Yoshitaka Watanabe: Numerical Verification Methods for Solutions of Semilinear Elliptic Boundary Value Problems, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol. 2, No. 1 (January 2011) pp. 2-31.
- ⑪ Yoshitaka Watanabe, Kaori Nagatou, Michael Plum, and Mitsuhiro T. Nakao: A Computer-assisted Stability Proof for the Orr-Sommerfeld Problem with Poiseuille Flow, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol. 2, No. 1 (January 2011) pp. 123-127.
- ⑫ 渡部 善隆, 長藤 かおり, Michael Plum,

中尾 充宏: 無限次元固有値問題に対する固有値の非存在証明, 研究集会・数値解析と数値計算アルゴリズムの最近の展開, 京都大学数理解析研究所講究録 Vol. 1719 (2010) pp. 118-129. (2010年11月)

- ⑬ Mitsuhiro T. Nakao, Yoshitaka Watanabe, Nobito Yamamoto, Takaaki Nishida and Myoung-Nyoun Kim: Computer Assisted Proofs of Bifurcating Solutions for Nonlinear Heat Convection Problems, Journal of Scientific Computing, Vol. 43, No. 3 (June 2010) pp. 388-401.
- ⑭ Yoshitaka Watanabe and Mitsuhiro T. Nakao: Numerical Verification Method of Solutions for Elliptic Equations and Its Application to the Rayleigh-Bénard Problem, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 26, No. 2-3 (October 2009) pp. 443-463.
- ⑮ Yoshitaka Watanabe: A Numerical Verification Method for Two-Coupled Elliptic Partial Differential Equations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 26, No. 2-3 (October 2009) pp. 233-247.

[学会発表] (計 27 件)

- ① 渡部 善隆, 長藤 かおり, Michael Plum, 中尾 充宏: 無限次元作用素に対する固有値の除外理論と精度保証付き数値計算, 九州大学数値解析学セミナー, 九州大学大学院数理学研究院, 2012年4月24日.
- ② 渡部 善隆, 藤原 宏志: exflibにおける多倍長区間演算 Fortran インターフェースとその応用, 日本応用数学会 2012年研究会連合発表会, 九州大学, 2012年3月8日~9日. 発表日: 2012. 3. 8.
- ③ Yoshitaka Watanabe: Computer-assisted stability and instability proofs for the Orr-Sommerfeld problem with Poiseuille flow, Workshop on "Avoided? Crossing of Eigenvalue Curves" --Non-commutative Harmonic Oscillator, Special Functions and Number Theory--, Kyushu University, March 7-9, 2012. 発表日: 2012. 3. 7.
- ④ 渡部 善隆, 長藤 かおり, Michael Plum, 中尾 充宏: 無限次元作用素に対する固有値の計算機援用非存在証明, 応用数
- 学合同研究集会報告集 pp.188-191, 龍谷大学, 2011年12月. 発表日: 2011. 12. 16.
- ⑤ 渡部 善隆: 逐次反復に基づく関数方程式の精度保証付き数値計算, 研究集会: 「科学計算の信頼性とその周辺に関するワークショップ」, 西海国立公園九十九島ビジターセンター, 佐世保市, 2010年11月24日~26日. 発表日: 2011. 11. 24.
- ⑥ 渡部 善隆, 木下 武彦, 中尾 充宏: Orr-Sommerfeld 方程式に対する局所一意性付き計算機援用証明, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, pp. 146-147, 信州大学, 2011年9月28日~10月1日. 発表日: 2011. 10. 1.
- ⑦ 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏: 線形楕円型偏微分作用素の逆作用素に対する事後誤差評価について, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会 応用数学分科会講演アブストラクト, pp.142-145, 信州大学, 2011年9月28日~10月1日. 発表日: 2011. 10. 1.
- ⑧ Yoshitaka Watanabe: Computer-assisted proof for functional equations based on infinite dimensional sequential iteration, Japanese-German Workshop on Computer-Assisted Proofs and Verification Methods, Karlsruhe Institute of Technology, Germany, September 18-22, 2011. 発表日: 2011. 9. 22.
- ⑨ 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏: 線形楕円型偏微分作用素の逆作用素に対する高精度な事後評価について, 日本応用数学会 2011年度年会講演予稿集, pp. 345-346, 同志社大学, 2011年9月14日~16日. 発表日: 2011. 9. 16.
- ⑩ 渡部 善隆: 逐次反復に基づく関数方程式の計算機援用証明, 日本応用数学会 2011年度年会講演予稿集, pp. 341-342, 同志社大学, 2011年9月14日~16日. 発表日: 2011. 9. 16.
- ⑪ 渡部 善隆: 微分方程式の精度保証付き数値計算, 研究集会: 可積分系数理論の進化, 京都大学数理解析研究所, 2011年8月17日~19日. 発表日: 2011. 8. 18.
- ⑫ Shuting Cai, 長藤 かおり, 渡部 善隆: An enclosure method for solutions of FitzHugh-Nagumo equation, 応用数学会合同研究集会報告集 pp.197-198, 龍谷大学, 2010年12月. 発表日: 2010. 12. 16.
- ⑬ 渡部 善隆: 無限次元固有値問題に対する固有値の除外法, 研究集会: 「数値解

- 析と計算の信頼性評価」, ハウステンボス, ユトレヒト, 佐世保市, 2010年11月21日~23日. 発表日: 2010年11月23日
- ⑭ Yoshitaka Watanabe:
A self-validating norm computation of inverse for infinite dimensional linear operators and its applications, 14th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics (SCAN 2010), September 27-30, 2010, ENS de Lyon, France.
[招待講演] 発表日: 2010年9月30日
- ⑮ 渡部 善隆, 長藤 かおり, 中尾 充宏: 非自己共役作用素に対する固有値の除外法, 日本応用数学会 2010年度年会, 明治大学, 2010年9月8日. [特別講演]
- ⑯ 渡部 善隆: MATLABで偏微分方程式の精度保証プログラムを作ってみました, 九州大学数値解析学セミナー, 九州大学大学院数理学研究院, 2010年7月27日.
- ⑰ Kaori Nagatou and Yoshitaka Watanabe: Computer assisted proofs for partial differential equations, Seminar at University of Kent, UK. 2010. 3. 31.
- ⑱ Yoshitaka Watanabe: Computer-assisted existence proofs with local uniqueness for the Orr-Sommerfeld problem, International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2010 (INVA2010), March 10-15, 2010, Hotel Lido Azzurro, Hachijyo Island, Tokyo, Japan. 発表日: 2010. 3. 11.
- ⑲ 渡部 善隆, 木下 武彦: Legendre 多項式を用いた高精度品質保証—およびその課題—, 日本応用数学会 2010年研究部会連合発表会, 筑波大学, 2010年3月. 発表日: 2010. 3. 8.
- ⑳ 渡部 善隆, 中尾 充宏, Michael Plum, 長藤 かおり: ある非自己共役作用素の複素固有値の除外に対する数値的検証法 II, 応用数学合同研究集会報告集 pp. 133-134, 龍谷大学, 2009年12月. 発表日: 2009. 12. 17.
- 21 渡部 善隆: Orr-Sommerfeld 問題の解に対する局所一意性付き数値的検証, 研究集会: 「数値解析の現状と展望」—九州大学数値解析セミナーとその協力者からの発信—, 公立ほこだて未来大学, 2009年11月. 発表日: 2009. 11. 22.
- 22 渡部 善隆, 中尾 充宏, Michael Plum, 長藤 かおり: Orr-Sommerfeld 方程式の複素固有値の除外に対する計算機援用証明, 日本応用数学会 2009年度年会, 大阪大学, 2009年9月30日.
- 23 木下 武彦, 渡部 善隆, 中尾 充宏: 楕円型作用素の逆作用素の作用素ノルムの評価の改良について, 日本数学会 2009年度秋季総合分科会, 大阪大学, 2009年9月26日.
- 24 Kaori Nagatou, Malcolm Brown, Myoungnyoun Kim, Yoshitaka Watanabe and Ian Wood: Spectral problem for 3-D photonic crystals, Proceedings of the international Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2009 (ICNAAM-2009), September 18-22, Rethymno, Crete, Greece. AIP Conference Proceedings Vol. 1168, pp. 922-925, 2009. 発表日: 2009. 09. 21
- 25 渡部 善隆: 熱対流問題の精度保証—計算の品質評価—, 九州大学産業数理研究センター 第7回ワークショップ, 2009年9月3日.
- 26 Yoshitaka Watanabe: An eigenvalue excluding method for the Orr-Sommerfeld problem, International Conference on Engineering and Computational Mathematics (ECM2009) May 27-29, 2009, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China. 発表日: 2009. 5. 27.
- 27 渡部 善隆: 計算機援用証明による並行 Poiseuille 流れの安定性・不安性解析, 九州大学数値解析学セミナー, 九州大学大学院数理学研究院, 2009年4月28日.

〔図書〕(計2件)

- ① 日本シミュレーション学会編: シミュレーション辞典, 微分方程式と数値計算(分担執筆・渡部 善隆), コロナ社, 2012年2月, A4判, 454頁.
- ② 中尾 充宏, 渡部 善隆: 実例で学ぶ精度保証付き数値計算—理論と実装—, 臨時別冊・数理科学 2011年10月 (SGCライブラリ 85), サイエンス社, 2011-10-25, JAN:4910054701012, B5判, 216頁.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.cc.kyushu-u.ac.jp/RD/watanabe/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡部 善隆 (WATANABE YOSHITAKA)
九州大学・情報基盤研究開発センター・
准教授
研究者番号：90243972

(2) 連携研究者

長藤 かおり (NAGATOU KAORI)
九州大学・マス・フォア・インダストリ
研究所・准教授
研究者番号：40326426