

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月24日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540136

研究課題名（和文） 亀裂進展モデルと移動境界問題の融合的研究

研究課題名（英文） Study of crack propagation models and moving boundary problems

研究代表者

木村 正人（KIMURA MASATO）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：70263358

研究成果の概要（和文）：

本研究では、破壊力学における亀裂進展モデルを中心に、関連する様々な移動境界問題について融合的に数理解析・数値解析の研究を行った。これらは全く異なる現象でありながら、幾何学的制約に由来する困難さと変分構造の重要性という共通点がある。本研究において、移動境界問題で成功をおさめている反応拡散系によるフェイズ・フィールド・モデルの亀裂進展問題への適用、及び変分構造を持つ多角形版移動境界問題の枠組みの構築及びその数値解析などを行うことに成功した。

研究成果の概要（英文）： In this research, we studied several crack propagation models in fracture mechanics and related various moving boundary problems from viewpoints of mathematical and numerical analyses. These are completely different phenomena, however, both have geometrical difficulty and importance of variational structures. We succeeded in proposing a phase field model by means of reaction diffusion system, which is a powerful tool in moving boundary problems, and constructed a polygonal motion with variational structure and its numerical analysis.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：応用数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：亀裂進展モデル，移動境界問題，フェーズフィールドモデル

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、これまで主に様々な偏微分方程式で記述される移動境界問題とそれに関連した数理モデルについて、その数学的構造の理解や数値解法の構築などの研究を行ってきた。その中で、下記に述べる研究テーマ・手法に着目し、類似の幾何学的制約を持つ亀裂進展モデルと移動境界問題を融合し

て研究を行い、共通する新たな数理的・数値的手法の開発研究計画を立てる着想に至った。移動境界問題とその応用の専門家である、チェコ工科大学の Michal Benes 氏とスロバキア工科大学の Karol Mikula 氏には特に研究組織表以外の研究協力者（海外共同研究者）として協力をお願いした。

## 2. 研究の目的

下記で述べるような問題群に対し、融合的に取り組む今回の計画は、幅広い研究分野に関係するユニークな研究計画である。本研究においては、数理解析的手法と数値解析的手法、理工学的应用の三方に気を配りながらの研究推進になるが、それはこれまで研究代表者の目指してきた研究スタイルであり、本研究計画でしか実現できない独自の研究成果が得られ、新たな数理のおよび数値的手法の開発・理工学への応用展開などへの展望が期待されるものである。

## 3. 研究の方法

研究代表者がこれまで培ってきた手法や研究アイデアに基づき、以下に述べるテーマについて、融合的な手法やアイデアを用いて、研究を行った。

### (1) 亀裂進展問題のモデリングとシミュレーション

Griffith-Francfort-Marigo モデルと反応拡散系近似の視点から、エネルギー解放率をキーワードに研究を進めた。また、アダプティブ・メッシュの有限要素法を用いて数値シミュレーションを行い、定性的な亀裂進展の再現を目指した。(図1参照)

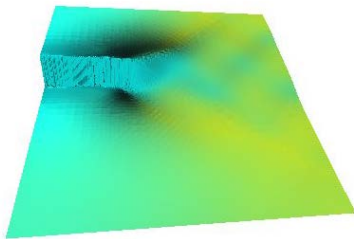


図1. フェイズ・フィールド・モデルによる亀裂進展シミュレーションの例

### (2) 多角形版移動境界問題の解析と応用

エネルギー等式・不等式を満たす離散モデルの研究として、クリスタライン法のアイディアを拡張した多角形版の移動境界問題を考えた。(図2参照)

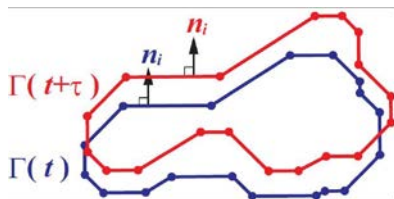


図2. 多角形版移動境界問題で使われるクリスタライン法イメージ図。予め指定された法線方向を持つ多角形の挙動として記述される。

### (3) 亀裂問題におけるエネルギー解放率の数学解析

破壊力学における基本的かつ重要な概念であるエネルギー解放率の数学解析を、形状感度解析で用いられる領域摂動の手法と、無限次元バナッハ空間における陰関数定理を用いて行った。

### (4) アダプティブメッシュ有限要素法の適用

数値シミュレーション手法として、空間2次元反応拡散系に対するアダプティブメッシュ有限要素法のプログラムを活用し、亀裂進展フェーズフィールドモデルの数値計算を行う。(図3参照)

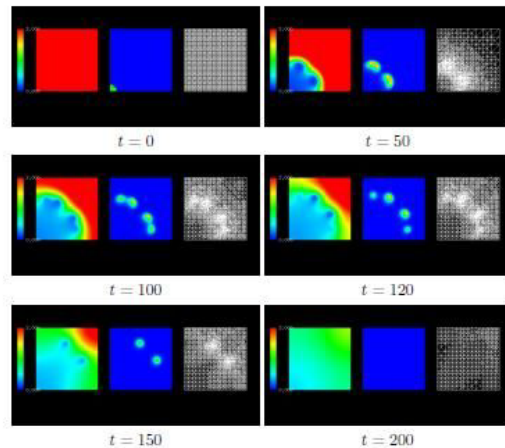


図3. 反応拡散系 (Gray-Scott モデル) に現れるスポットパターン・ダイナミクスに対するアダプティブメッシュ有限要素解析の例。各時刻における右端の図が解に合わせて自動的に変化する有限要素メッシュ

## 4. 研究成果

(1) これまで様々な数値計算モデルが提案されながら、数学的に明瞭な数理モデルを欠いていた弾性体内の亀裂進展に関して、移動境界問題において発達した数理手法であるフェーズフィールド法を用いたモデリングを行い、正則化されたエネルギーの勾配系として反応拡散方程式型の数理モデルを導いた。また、アダプティブメッシュ有限要素法を用いて、様々な状況下においてモード III 亀裂進展の数値シミュレーションを行い、モデルの有用性をその数値計算結果を通じて確かめた。(T. Takaishi and M. Kimura (2009))

更に、同様のエネルギーを用いたフェーズフィールドモデル導出の考え方をバネ質点系を用いた破壊モデルに適用し、バネ切断系

件に対して数学的な枠組みを与えることに成功した。(M. Kimura and T. Takaishi (2011))

(2) 亀裂問題に現れるエネルギー解放率に関して、形状感度解析の手法とバナッハ空間における陰関数定理を用いて数学的枠組みを構築し、その変数係数非等方線形弾性体における曲面亀裂のエネルギー解放率の存在証明を与えるとともに、エネルギーの形状変形に関する高階微分可能性を証明した。(M. Kimura and I. Wakano (2011)) 更に、p-Laplacian 型の非線形楕円型作用素に対しても、非線形作用素の単調性を利用し、エネルギー解放率の存在と積分表示が拡張できることを示した。(K. Ohtsuka and M. Kimura (2012))

(3) いくつかの移動境界問題やパターン形成の問題に関連して、移流項の卓越した楕円型作用素のディリクレ境界条件下での固有値問題を取り上げ、その特異摂動問題をエネルギー評価を用いた手法により解析した。速度ポテンシャルの井戸の深さが、固有値の指数減衰現象の指数に対応することなどを証明した。(S. Jimbo, M. Kimura and H. Notsu (2009))

(4) 多くの移動境界問題が持つ特徴であり、数値計算上の困難さの元にもなっていた、面積保存性や界面縮小性、法線ベクトル場・曲率項などの幾何学的諸量の数値的取り扱いを簡便にする手法として、多角形版移動境界問題の枠組みを構築し、様々な移動境界問題がその枠組みで扱えることを示した。また、面積保存 2 次精度の時間方向陰的スキームを開発し、その収束証明を行うとともに、数値例を通して本手法の有効性を確認した。(M. Benes, M. Kimura and S. Yazaki (2009))

代表者らが提案している多角形版移動境界問題の枠組みを、ヘレシヨウ流れおよびナビエ・ストークス方程式の表面張力効果を考慮した移動境界問題に拡張し、自然なエネルギー保存/減少性を持たせることができることを示した。また、もとの移動境界問題が持つ変分構造とほぼ同じ構造を多角形版移動境界問題が持っていることをヘレシヨウ流れの場合に証明した。また、表面張力効果を持つ多角形版ヘレシヨウ流れ問題の時間局所解の一意存在を証明した。(M. Kimura, D. Tagami and S. Yazaki, (in preparation))

(5) 体積保存型の非局所項を持つ非等方 Allen-Cahn 方程式に対し、高精度な数値解法を提案し、その特異極限である面積保存非等方曲率流問題と数値的な比較を行った。それ

により、それぞれの解の長時間に渡る挙動が数値的に一致することを確認した。また、この非局所項を持つ非等方 Allen-Cahn 方程式が、固体の再結晶化現象にも関連していることを示唆する結果を得た。(M. Benes, S. Yazaki and M. Kimura (2011))

(6) MPS 法などのメッシュフリー粒子法で用いられる差分公式について、粒子間距離に関する新たな数学的指標を提案し、その打ち切り誤差の数学的な評価を与えた。(石島清宏, 木村正人 (2010)) 更に、その結果をより一般の重み関数の場合に拡張し、重み関数のある種の可積分性が打ち切り誤差評価に重要であることを示した。(木村「粒子法研究会」での研究発表, 論文準備中)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① K. Ohtsuka and M. Kimura, Differentiability of potential energies with a parameter and shape sensitivity analysis for nonlinear case: the p-Poisson problem, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol.29, No.1 (2012), pp.23-35. (査読有)
- ② M. Benes, S. Yazaki and M. Kimura, Computational studies of non-local anisotropic Allen-Cahn equation, Math. Bohem. Vol.136, No.4 (2011) pp.429-437. (査読有)
- ③ M. Kimura and I. Wakano, Shape derivative of potential energy and energy release rate in fracture mechanics, Journal of Math-for-industry, Vol.3 (2011) A, pp.21-31. (査読有)
- ④ M. Kimura and T. Takaishi, Phase field models for crack propagation. Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol.59 (2011) pp.85-90. (査読有)
- ⑤ 石島清宏, 木村正人, メッシュフリー粒子法における差分公式の打ち切り誤差解析, 日本応用数学会論文誌 Vol.20, No.3 (2010) pp.165-182. (査読有)
- ⑥ M. Benes, M. Kimura and S. Yazaki, Second order numerical scheme for motion of polygonal curves with constant area speed, Interfaces and Free Boundaries, vol.11, no.4 (2009), pp.515-536. (査読有)
- ⑦ S. Jimbo, M. Kimura and H. Notsu, Exponential decay phenomenon of the principal eigenvalue of an elliptic

operator with a large drift term of gradient type, Asymtotic Analysis, vol.65 (2009), pp.103-123. (査読有)

- ⑧ T. Takaishi and M. Kimura, Phase field model for mode III crack growth in two dimensional elasticity, Kybernetika vol.45, no.4 (2009), pp.605-614. (査読有)

[学会発表] (計 21 件)

- ① 木村正人, 粒子法の勾配差分の打ち切り誤差評価と重み関数, 「粒子法研究会 (第十六回)」, 2012 年 3 月 2 日, (東京大学工学部)
- ② 木村正人, エネルギー勾配構造をもつ振動・破壊モデル, 「中木記念シンポジウム」, 2011 年 12 月 7 日, (広島大学東千田キャンパス)
- ③ 木村正人, エネルギー変分型の破壊現象モデル, 「ウィンタースクール 数理モデルの産業・諸科学への活用 -数理モデルの夢-」, 2011 年 12 月 2 日, (富士通汐留シティセンター)
- ④ Masato Kimura, Gradient flow models in elasticity --- crack and dislocation dynamics, Workshop on Reliability in Scientific Computing and Related Topics, 25-Nov-11, (Saikai National Park Kujyukushima Visitor Center, Sasebo JAPAN)
- ⑤ 木村正人, 亀裂進展および転位運動のエネルギー勾配流モデル, 「第 11 回盛岡応用数学小研究集会」, 2011 年 11 月 12 日, (岩手大学),
- ⑥ Masato Kimura, Continuous and discrete crack propagation models with energy gradient property, Forum "Math-for-Industry" 2011 (FMI2011), 25-Oct-11, (University of Hawai'i)
- ⑦ Masato Kimura, Energy gradient systems in fracture and dislocation dynamics, 7-Sep-11, CASA Colloquium (Eindhoven University of Technology)
- ⑧ Masato Kimura, Truncation error analysis for particle methods, EASIAM2011, 28-Jun-11, (Waseda University, Kitakyushu Campus)
- ⑨ 木村正人, 転位線運動のフェーズフィールドモデルと Peach-Koehler 力 「日本応用数学会 2011 年研究部会連合発表会」, 2011 年 3 月, (電気通信大学)
- ⑩ 木村正人, 弾性体のバネ質点系近似についての考察 「ワークショップ 連続体力学の現象と数理」, 2011 年 2 月, (九

州大学西新プラザ)

- ⑪ 木村正人, Parameter variation theorems and applications to crack problems, 「第 28 回 九州における偏微分方程式研究集会」, 2011 年 1 月, (九州大学西新プラザ)
- ⑫ 木村正人, 変分構造を持つ多角形移動境界問題 「10th Workshop of CoMfOS」, 2010 年 11 月, (岡山理科大学)
- ⑬ 木村正人, 多角形運動における多角形曲率の一般化とその応用, 「数値解析と計算の信頼性評価」, 2010 年 11 月, (ハウステンボス, 佐世保)
- ⑭ 木村正人, 多角形曲率の一般化と移動境界問題への応用 「科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開」, 2010 年 10 月, (京都大学数理解析研究所)
- ⑮ Masato Kimura, On some generalizations of polygonal motions, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010 (Czech Technical University, Czech Republic) September 2010.
- ⑯ Masato Kimura, On some generalizations of polygonal motions, Tutorial Lectures and International Workshop "Singular Diffusion and Evolving Interfaces", August 2010, (Hokkaido University, Japan)
- ⑰ 木村正人, 亀裂進展現象を記述するフェーズフィールドモデルについて, 「第 59 回理論応用力学講演会 (NCTAM2010)」, 2010 年 6 月, (日本学術会議)
- ⑱ 木村正人, 楕円型エネルギーの領域変分に対するパラメータ変分公式の応用, 「日本数学会 2010 年度年会」, 2010 年 3 月, (慶應義塾大学)
- ⑲ 木村正人, バナッハ空間におけるパラメータ変分公式と亀裂問題におけるエネルギー解放率, 「ワークショップ 変分法と領域摂動」, 2010 年 2 月, (神戸インスティテュート)
- ⑳ 木村正人, 線形および非線形楕円型エネルギーの領域変分, 「2009 年度応用数学合同研究集会」, 2009 年 12 月, (龍谷大学)
- ㉑ 木村正人, フェイズ・フィールドを用いたモード III 亀裂進展の数理モデルとシミュレーション, 「産業技術数理研究センター第 7 回ワークショップ, 水素利用社会の実現に向けた数値解析からの貢献」, 2009 年 9 月, (九州大学)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況（計0件）

○取得状況（計0件）

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

木村 正人 (KIMURA MASATO)  
九州大学・マス・フォア・インダストリ研  
究所・准教授  
研究者番号：70263358

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし