

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540141

研究課題名（和文） 都市の人口爆発を表す非線形偏微分積分方程式の解の爆発条件

研究課題名（英文） A blowup condition for solutions of the nonlinear integro-partial differential equation that describes population explosions

研究代表者

田畑 稔 (TABATA MINORU)

大阪府立大学・工学研究科・教授

研究者番号：70207215

研究成果の概要（和文）：次の命題を証明することができた：全人口がある正定数より大きく、かつ初期条件の人口密度関数の勾配が十分に大きいなら、人口爆発を表す非線形偏微分積分方程式に対する混合問題は爆発解を持ち、その解は超関数の意味でデルタ関数に収束する。

研究成果の概要（英文）：We succeed in proving the following proposition: there exists a positive constant such that if initial total population and the gradient of the initial population density are larger than the positive constant, then the mixed problem for the nonlinear integro-partial differential equation that describes population explosions has a blowup solution, which converges to Dirac delta function in the sense of distribution.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：人口爆発、人口移動、マスター方程式、非線形偏微分積分方程式

1. 研究開始当初の背景

経済発展が著しい東南アジアや中国沿海州の多くの地域では、人口集中による都市の人口爆発が起きている。人口爆発はスラムの発生や都市環境の悪化等の深刻な問題をもたらす人口論的事象 (demographic event) である。社会力学では、このような人口爆発現象を数理モデル化し、いくつかの基本的な関数方程式が導出されている(M. Fujita and P. Krugman【著】: The Spatial Economy, MIT Press, 2001, 邦訳: 空間経済学, 東洋経済新報社)。その中で特に重要なのが、

Weidlich-Haag の人口爆発モデルである。この数理モデルでは master 方程式 (Chapman-Kolmogorov 方程式とも言う) と呼ばれる非線形偏微分積分方程式の未知関数で人口密度が表され、その混合問題の爆発解で人口爆発が表現されている。この方程式は統計力学を起源とし、その名の通り様々な方程式が演繹される重要な方程式である。急激に膨張している都市の衛星写真を経年観察すれば、それがシャーレで培養された微生物のコロニーのようなパターンを形成することは、地理学者の間ではよく知られてい

た。この数理モデルは、そのような自己組織化現象を上手く説明しており、優れた実証性が確認されている(W. Weidlich【著】: Sociodynamics, Harwood Academic, 2000, 邦訳: ソシオダイナミクス, 森北出版)。

2. 研究の目的

この数理モデルについては、多くの興味深い数値実験結果が報告されていた。例えば、全人口が多いと定数解は不安定であり、少しでも人口分布に不均衡があれば人口移動が始まり、領域内部のいくつかの点に人口が集中して人口爆発が起き、領域の境界の近傍では人口密度がゼロになるという数値実験結果が得られていた。このような実験結果は、東南アジアや中国沿海州の人口爆発を起こしている都市の衛星写真の経年変化を上手く説明していることが知られていた(D. Helbing【著】: Quantitative Sociodynamics, Kluwer Academic Publishers, 1995)。このような数値実験結果が数多く得られているにも関わらず、社会力学の master 方程式は全く新しいタイプの非線形偏微分積分方程式であるため、解の構造は数理解析的にはほとんど解明されていなかった。そこで本研究では数値実験によって予想することができた研究成果の概要(和文)で述べた人口爆発に関する命題を証明した。

3. 研究の方法

研究で採用した方法やその問題への適用の詳細を年度別に述べる。

平成 21 年度: 数理モデルと数値実験を主な研究方法として採用した。以下にその詳細を述べる。

(1) 関数方程式論の立場から人口爆発モデルを検討した。研究目的で述べた予想命題は、社会力学の master 方程式の混合問題が爆発解を持つための十分条件を与えている。人口爆発現象の数理社会学的研究は、実際予想命題の証明にヒントを与えてくれた。

(2) 予想命題検証のために数値実験を行った。多くの数理生物モデルが、非線形放物型偏微分方程式(系)によって表現される。そのような非線形放物型偏微分方程式の一種である非線形 Fokker-Planck 方程式の解は、社会力学の master 方程式の解と、時間局所的に幾何学的相似であることが知られていた。そのため人口爆発モデルは数理生物モデルに似ていると研究計画開始直後は予想していた。しかし基盤研究(C)理論経済学「少子化に伴う労働人口減少に関する経済分析のための複雑系数理経済モデルの構築」(代表者: 高木一郎, 分担者: 田畑稔)において多くの数値実験を行った結果、このような幾何学的相似は時間局所的にしか成立せず、人口

爆発が起きる場合は2つのモデルの挙動は時間大域的には全く違ったものになることを発見するに至った。この発見によって本研究が大きく進展した。そして研究成果の概要(和文)で述べた命題を予想するに至った。しかしこの数値実験は、理論経済学への応用を目的としており、モデルのパラメータの範囲が制限されているという大きな弱点があった。そこでこの制限を緩めて数多くの数値実験を行った。社会力学の master 方程式の数値実験には長い時間を要するので、我々が開発した新しい数値計算手法を使って計算効率を高め、時間短縮をすることができた。これらの数値計算は、いままで同方程式の数値解析を行ってきた田畑が行った。また高木が数値実験結果を数理社会学の立場から検討を加えた。

平成 22 年度: 数理統計学的汎関数を主な方法として用いた。以下にその詳細を述べる。

(3) 人口密度関数が増加する様子を数理統計学的汎関数を用いて評価した。社会力学の master 方程式には、旧来の非線形偏微分積分方程式の手法が全く使えず、長らくその研究は停滞していた。これに対して情報通信システムに関する数理統計学的情報理論が進展し、伝達情報の数理統計学的汎関数(伝達情報の capacity, 同情報の entropy, 確率密度関数の地理的 bias 指数)を用いて確率密度関数の挙動を評価する手法が研究代表者らによって開発されていた。本研究ではこの手法を社会力学の master 方程式の人口移動情報と人口密度関数に応用することを試み、大きな成功をおさめることができた。実際、人口移動において、ある地域の人口移動情報が別の地域の人口移動に影響を与え、今度は逆にその地域の人口移動情報が元の地域の人口移動に影響を与える。このような人口移動情報のフィードバックが人口爆発の引き金になると考えられるが、今まで行ってきた数値実験で得た知識から、人口移動情報の capacity や同情報の entropy を使えば、このフィードバックを上手く評価できると予想されていたが、本年度の研究により実際その通りに証明できた。さらに人口密度関数の地理的 bias 指数は人口の集中度合いをよく表現していることが以前から分かっていたが、これらの人口移動の数理統計学的汎関数(人口移動情報の capacity, 同情報の entropy, 人口密度関数の地理的 bias 指数)を用いて社会力学の master 方程式の解が増加する様子を評価することに成功した。

(4) 数理統計学的汎関数の漸近挙動を評価する。社会力学の master 方程式の積分核は、距離特異性と時間遅れの汎関数を含むため、人口密度関数を直接評価するのは困難であることは、当初から知られていた。しかし社

会力学の master 方程式の両辺に、時間遅れを持つ人口密度関数を含む適当な関数をかけて、空間変数について局所的に積分すれば、数理統計学的汎関数が満足する時間遅れを持つ非線形関数方程式系が得られることを発見した。この方程式系では積分核が有している人口密度関数を複雑に変化させる効果が和らげられ、master 方程式より取り扱い易くなった。即ち、人口密度関数そのものより数理統計学的汎関数の方が評価し易いことが幸いしたと言える。

平成 23 年度：研究の完成

(5) 予想命題を証明することができた。

研究プロセス(3)で master 方程式の解が増加する様子を数理統計学的汎関数を用いて評価し、研究プロセス(4)で数理統計学的汎関数の漸近挙動を評価し、この二つの評価を組み合わせて研究成果の概要(和文)で述べた命題を証明することに成功した。研究成果を応用数学の学術誌に論文として発表した。

4. 研究成果

数理社会学(mathematical sociology)の一分野である社会力学(sociodynamics)では、人口集中現象を、master 方程式と呼ばれる非線形偏微分積分方程式で表し、その混合問題の爆発解で都市の人口爆発を表現している。この方程式については、多くの数値実験がなされているが、全く新しいタイプの関数方程式であるため、解の構造はよく分かっていない。そこで本研究では数値実験から予想される人口爆発条件(混合問題が爆発解を持つための十分条件)に関する次の命題を証明することができた。命題：全人口がある正定数より大きく、かつ初期条件の人口密度関数の勾配が十分に大きいなら、人口爆発を表す非線形偏微分積分方程式に対する混合問題は爆発解を持ち、その解は超関数の意味でデルタ関数に収束する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Minoru Tabata, Nobuoki Eshima, and Ichiro Takagi, A mathematical modeling approach to the formation of urban and rural areas: Convergence of global solutions of the mixed problem for the master equation in sociodynamics. Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, Elsevier Science, Amsterdam, Vol. 12, Issue 6, 2011, pp. 3261-3293.
- ② Nobuoki Eshima and Minoru Tabata, Three

predictive power measures for generalized linear models: Entropy coefficient of determination, entropy correlation coefficient and regression correlation coefficient, Computational Statistics & Data Analysis, Vol. 55, 2011, pp. 3049-3058, Elsevier Science, Amsterdam.

- ③ Minoru Tabata, Nobuoki Eshima, and Ichiro Takagi, A mathematical-model approach to human population explosions caused by migration, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, Elsevier Science, Amsterdam, Vol. 11, Issue 5, 2010, pp. 4027-4042.
- ④ Nobuoki Eshima and Minoru Tabata, Entropy coefficient of determination for generalized linear models, Computational Statistics & Data Analysis, Elsevier Science, Amsterdam, Volume 54, Issue 5, 2010, pp. 1381-1389.
- ⑤ Nobuoki Eshima, Osamu Tokumaru, Shohei Hara, Kira Bacal, Seigo Korematsu, Minoru Tabata, Shigeru Karukaya, Yoshinori Yasui, Nobuhiko Okabe, Toyojiro Matsuishi, Sex- and age-related differences in morbidity rates of 2009 pandemic influenza A H1N1 virus of swine origin in Japan. PLoS ONE 6(4): doi:10.1371/journal.pone.0019409 <http://dx.plos.org/10.1371/journal.pone.0019409>, 2010, pp. 1261-1293
- ⑥ Nobuoki Eshima, Osuke Iwata, Sachiko Iwata, Minoru Tabata, Yasunori Higuchi, Toyojiro Matsuishi, and Shigeru Karukaya, Age and gender specific prevalence of HTLV-1: a hidden paradox, Journal of Clinical Virology, Elsevier Science, Amsterdam, Volume 45, Issue 2, 2009, pp. 135-138.
- ⑦ Minoru Tabata and Nobuoki Eshima, The Kramers-Moyal expansion of the master equation that describes human migration in a bounded domain, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, Elsevier Science, Amsterdam, 2009, Vol. 10, pp. 639-664

[図書] (計 2 件)

- ① Minoru Tabata and Nobuoki Eshima, A stochastic agent-based approach to the Fokker-Planck equation in human population dynamics, In: *Partial Differential Equations: Theory, Analysis and Applications*, pp. 51-69, Editor: Christopher L. Jang, 2010 Nova Science Publishers, Inc. Series: Mathematics Research Developments, Pub. Date: 2011 1st quarter, ISBN: 978-1-61122-858-8

- ② M. Tabata, T. Moriyama, S. Motoyama, and N. Eshima, A mathematical-model approach to chlamydial infection in Japan. In: *Progress in Nonlinear Analysis Research*, pp. 62-78, ISBN: 978-1-60456-359-7
Editor: Erik T. Hoffmann, pp. 25-33, Chapter 2, 2009 Nova Science Publishers, Inc

[その他]

ホームページ等

<http://www10.ocn.ne.jp/~mtabata/research.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田畑 稔 (TABATA MINORU)

大阪府立大学・工学研究科・教授

研究者番号：70207215

(2) 研究分担者

江島伸興 (ESHIMA NOBUOKI)

大分大学・医学部・教授

研究者番号：20203630

高木 一郎 (TAKAGI ICHIRO)

東海大学・総合経営学部・教授

研究者番号：90226746