

機関番号： 32702

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2009~2011

課題番号：21540149

研究課題名 (和文) エレメンタリーサブモデルによる位相空間とその積空間の被覆性の考察

研究課題名 (英文) The study for covering properties of topological spaces and their products in terms of elementary submodels

研究代表者

矢島 幸信 (YAJIMA YUKINOBU)

神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：10142548

研究成果の概要 (和文)：「Recent Progress in General Topology III」というタイトルの本の編集者から P. Szeptycki 氏と共著で「位相空間の被覆性」に関する survey の執筆を依頼された。その中で研究してきたエレメンタリーサブモデルの応用について述べた。さらにエレメンタリーサブモデルの研究は、直接的ではないが、単調正規空間をファクターにもつ位相積空間の被覆性と正規性の研究へと繋がっていった。それらは証明において集合論的な手法を用いながらも、結果は完全に位相空間論的に表現されるという、まさにエレメンタリーサブモデルと同じ性質をもっている。その研究成果は2011年と2012年において2つの単著論文で発表されたが、最近では家本宣幸氏および平田康史氏との研究協力を得て、この研究はさらに大きく前進しつつある。

研究成果の概要 (英文)： The editor of the book titled “Recent Progress in General Topology III “ asked me to write a survey concerning “Covering properties” with P. Szeptycki. We have taken up some applications of elementary submodels in it. Then the study of elementary submodels has been connected to that of covering properties and normality of the products with a monotonically normal factor. These studies have a similar aspect in the sense that the proofs are done by set-theoretic methods but the conclusions are completely expressed by general topology. Two papers have been published in 2011 and 2012 for this subject. In the present, getting the corporation with Nobuyuki Kemoto and Yasushi Hirata, this study has been greatly developed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：数学基礎論

1. 研究開始当初の背景

(1) 位相空間の積空間における被覆性と正規性の研究は、1950年代から始まって延々と現代に至るまで研究されており、極めて長

い歴史をもっている。1960年代から1970年代にかけては、日本もそれなりに研究実績を残してきたともいえる。しかし、長い間研究されてきただけに、研究手法や証明技術など

多種多様なものが既に考案され、位相空間論的な視点からは既に開発し尽くされた感もある。それだけに位相空間論の未解決問題は、積空間のそれも含めて手つかずに残されてきた。

(2) ところが、1970年代後半頃から集合論的な考察が、位相空間論全体の未解決問題に向けられるようになった。即ち、集合論的な公理を仮定して結果を出すということである。これは「無矛盾」ということで問題の肯定的解決と否定的解決を判断する大きな指針となった。さらには、異なる集合論の公理を仮定して肯定的結論と否定的結論が出れば、その問題は「集合論的に独立」であるという結論に至り、その問題は解決されたことになる。そのような形で位相空間論の大きな問題は、現代までに次々と解決されてきた。

(3) こうして位相空間論の研究自体が、集合論の影響をもるに受ける方向と位相空間論的に伝統的な手法で考察するものに分かれてきた。米国や欧米などでは、集合論的考察からの研究が益々重視される方向に進んできている。日本の位相空間論の研究はその影響を受けつつも、伝統的手法が重視されてきた。その一方では、日本の集合論研究者が、位相空間論の問題を研究対象にして積極的に進出してきた。

(4) そのような中で、証明手法は集合論的であるが、それによって得られる結果は集合論的公理の仮定を一切必要としないという手法が出現した。これがエレメンタリーサブモデルという証明手法である。これは Dow が 1988年に初めて位相空間論に応用して以来、位相空間論の研究の広範囲において急速に発展してきた。いままでの複雑な構造が、一挙に短く表現できるのであるから確かに有力な証明方法に思えた。実際、Balogh はエレメンタリーサブモデルを駆使して、位相空間論の古くから未解決だった大きな問題を 1990年代に次々と解決していった。

(5) しかし、位相空間の被覆性の問題についての証明には、エレメンタリーサブモデルの応用はあまり例がなかった。それを Balogh が 2002年にエレメンタリーサブモデルを利用して、既知の有名な定理 2つを証明して見せたのである。彼自身は 2002年に心臓発作のため急逝しており、この論文は彼の死後発表された。もし彼が生きていれば、この論文は新しい結果の証明ではないので発表されなかったかもしれない。彼の証明はオリジナルの証明のアイデアを多分に利用しているとはいえ、この論文の意味するところは、エレメンタリーサブモデルは位相空間の被覆

性や正規性の研究にも、今後適用していけることを示唆している。

2. 研究の目的

(1) 位相空間論の中でも位相空間による積空間の被覆性と正規性の問題は、研究開始からすでに半世紀以上も経過しているほど長い歴史をもつ研究課題である。研究代表者は、その積空間の研究に長年従事してきた。当然、研究方法としては伝統的な位相空間論的手法が主体となってきた。しかし、歴史が長いだけに数多くの証明技術が開発され発表されてきた。それだけに現代ではこの問題について、従来の伝統的方法だけではある種の閉塞感を打破していけないと研究代表者は感じていた。そうかと言って、集合論的な公理を仮定して問題を解決しても、所詮それは部分的な解決に過ぎない。次には集合論的公理を弱めるか外して成り立つかが問題となってしまふ。それも一つの進展と言えるけれども…。

(2) そのような状況から、証明手法は集合論的であるが、それによって得られる結果には集合論的公理を必要としないというエレメンタリーサブモデルに興味を持つのは自然であると言える。さらには、前述の Balogh の示唆も強力な後押しとなった。つまり、いままで証明できなかった問題を、エレメンタリーサブモデルを使って、もう一度考え直してみる。これがこの度の大きな研究目的である。具体的には、次の 3つの問題の解決を目指してみる。

- ① 積空間 $X \times Y$ がパラコンパクトならば、それは長方形的か？ [Pasyukov の問題 (1975)]
- ② 積空間 $X \times BX$ がサブ正規ならば、 X はサブパラコンパクトか？ [Junnila の問題 (1980)]
- ③ パラコンパクト、メタコンパクト、サブメタコンパクト等の位相空間の被覆性を、方向付けられた開被覆とそのクッション系の細分により特徴づけられるか [Junnila-勝田の問題 (1975)]

これらは長い間未解決の難問である。エレメンタリーサブモデルを適用するくらいで完全解決できるとは到底思えないが、何らかの部分解を得て、今後の解決の方針を見つけていきたい。

3. 研究の方法

(1) 一昔前の集合論のポピュラーな本と言えば、Kunen (1980)くらいしかなかったが、最近では平易に書かれた集合論の本がいくつも見られるようになった。そのなかでエレ

メンタリーサブモデルに1セクションを割いている本を2, 3選んで, そのセクションを読む。それにより先ずはエレメンタリーサブモデルの全体的な概念とイメージを掌握した。

(2) 次に今までエレメンタリーサブモデルを位相空間論に応用した証明を読み進めた。その中で, その適用方法が2つに大別されることに気が付いた。その分類によって, 証明される結果の形も2つに分類される。形に残る最初の仕事として, その分類ノートを作成した。そのノートの厚さはバインダーに入り切れなくなる程の量となった。位相空間の被覆性に関する定理の証明に用いられる方法は, ある性質を満たす族の可算の全体をエレメンタリーサブモデルによりその存在を保証してやり, それが空間を被覆するかを考えてやればよいという方法であることが判明した。

(3) この方法で研究目的に記述した3つの問題を考察したが, 残念ながら未だ解決に至っていない。①の問題に関しては, 次元論の観点から次元の積定理がどの程度成り立つかも考えてみたが, すべて Pasyukov の定理 (1975) に吸収されてしまう。③については研究代表者自身が創出した概念の仮定のもとにエレメンタリーサブモデルを使って成り立つかどうかを考えたが, これも不発に終わってしまった。それで得た最終的な結論は, そもそもエレメンタリーサブモデルを使って得られる結果は, 使わないと煩雑であるが, 必ず使わなくても証明できるのであるから, 考え方の本質さえ同じならば, 無理をしてエレメンタリーサブモデルを使うことに固執する必要はないということである。

4. 研究成果

エレメンタリーサブモデルを用いて, 研究目的における3つの未解決問題のどれかに何らかの部分解決を与えて進展したというところには至らなかった。しかし, この方面の研究を続けたことによって, 次の2つの成果があったと言える。

(1) 1つ目はほぼ10年ごとに出版される「Recent Progress in General Topology, III」と題する本に「位相空間の被覆性」の分野での Survey の執筆を依頼された。その中で位相空間の被覆性への応用としてエレメンタリーサブモデルを扱うことが出来た事である。これは Balogh の仕事の紹介を中心として, 今後の発展の可能性を示唆した形にまとめた。この本は近々 Springer という数学関係では有名な出版社から刊行される予定である。この方面の研究者ならば, ほとん

どが購入するほど需要の高い本である。それだけに, この本への執筆は「位相空間の被覆性及び正規性」の研究者として一定の評価を与えられたと考えることができる。

(2) 2つ目は, エレメンタリーサブモデルの研究手法を勉強しているうちに, 非可算正則濃度における定常集合の応用性に重要な意味があることに気が付いたことである。それは単調正規空間を1つのファクターにもつ積空間の被覆性と正規性の考察という別の研究に遭遇したことである。これは従来の研究手法もさることながら, 定常集合の特殊性を十分生かした研究でありながらも, 最終的な定理の形には位相空間論的表現のみで, 集合論的な色彩がほとんどないというものである。しかもその対象は単調正規空間とコンパクト空間という単純な形の積空間で, その正規性という極めてよく知られた興味ある性質を扱い, おまけに得られた結果に意外性があるという, ある意味ではこれ以上ないような結果を得た。その証明方法は伝統的な位相空間論的手法と集合論的手法を融合した様な形になり, まさにエレメンタリーサブモデルを考察しようとした本来の目的とは別な形で達成されたことになる。逆に, エレメンタリーサブモデルを考察しなければ, この研究に着目することもなかったかもしれない。この研究の成果については, 研究代表者の単著論文が研究論文欄における論文①および④として既に発表されている。さらに, この研究は連携研究者・家本宣幸氏および研究協力者・平田康史氏との共同研究へと発展し, 現在も活発に研究結果が創出されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計15件)

- ① Yukinobu Yajima, Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games, *Topology and Appl.* 査読有, **159** (2012), 1223-1235.
- ② Yasushi Hirata and Nobuyuki Kemoto, Orthocompactness versus Normality in hyperspaces, *Topology and Appl.* 査読有, **159** (2012), 1169-1176.
- ③ Masami Sakai, The Frechet-Urysohn property of Pixley-Roy hyperspaces, *Topology and Appl.* 査読有, **159** (2012), 308-314.
- ④ Yukinobu Yajima, Normality of products of monotonically normal spaces with compact spaces, *Topology and Appl.* 査読有, **158** (2011),

- 2085-2089.
- ⑤ Gary Gruenhagen and Masami Sakai, Selective separability and its variations, *Topology and Appl.* 査読有, **158** (2011), 1352-1359.
- ⑥ Yukinobu Yajima, Normality covers of various products, *Topology and Appl.* 査読有, **157** (2011), 1569-1592.
- ⑦ Masami Sakai, On k -networks and weak bases for spaces, *Topology and Appl.* 査読有, **157** (2010), 2383-2388.
- ⑧ Nobuyuki Kemoto and Jun Terasawa, Strong zero-dimensionality of hyperspaces, *Topology and Appl.* 査読有, **157** (2010), 2376-2382.
- ⑨ Masami Sakai, Mizokami and Lin's conjecture on σ -CF* pseudo-bases, *Topology and Appl.* 査読有, **157** (2010), 152-156.
- ⑩ Yasushi Hirata and Nobuyuki Kemoto, Orderability of subspaces of well-orderable topological spaces, *Topology and Appl.* 査読有, **157** (2010), 127-135.
- ⑪ Masami Sakai, The Ramsey property for $C_p(X)$, *Acta Math. Hungar.* 査読有, **128** (2010), 96-105.
- ⑫ Haruto Ohta and Masami Sakai, Sequences of semicontinuous functions accompanying continuous functions, *Topology and Appl.* 査読有, **156** (2009), 2683-2691.
- ⑬ Nobuyuki Kemoto and Yukinobu Yajima, Certain sequences with compact closure, *Topology and Appl.* 査読有, **156** (2009), 1348-1354.
- ⑭ Masami Sakai, Selection principles and upper semicontinuous functions, *Colloq. Math.* 査読有, **117** (2009), 251-256.
- ⑮ Masami Sakai, Menger subsets of the Sorgenfrey line, 査読有, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 3129-3138.
- [学会発表] (計19件)
- ① Masami Sakai, DCCC of Pixley-Roy hyperspaces, 46th Spring Topology and Dynamics Conference, March 22, 2012, Mexico City (Mexico).
- ② 家本 宣幸, Products of monotonically normal spaces with various factors, General Topology シンポジウム, 2011年12月20日, 埼玉大学教育学部。
- ③ 酒井 政美, Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces, General Topology シンポジウム, 2011年12月19日, 埼玉大学教育学部。
- ④ 平田 康史, Products of monotonically normal spaces and subspace of ordinals, 一般および幾何学的トポロジーとその応用研究集会, 2011年10月19日, 京都大学数理解析研究所。
- ⑤ Masami Sakai, Selective separability of Pixley-Roy hyperspaces, 11th Prague Topological Symposium, August 9, 2011, Prague (Czech Republic).
- ⑥ 矢島 幸信, Products of monotonically normal spaces with factors defined by topological games, 第46回位相空間論シンポジウム, 2011年6月3日, 静岡大学理学部。
- ⑦ 酒井 政美, Selective separability とその未解決問題について, General Topology シンポジウム, 2010年12月22日, 筑波大学。
- ⑧ Yukinobu Yajima, Normality and products of topological games, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, September 30, 2010, Universidad de Colima, Colima (Mexico).
- ⑨ Nobuyuki Kemoto, Topological properties of hyperspaces: a set theoretical approach, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, September 29, 2010, Universidad de Colima, Colima (Mexico).
- ⑩ Masami Sakai, Selective separability and its variations, Analysis, Topology and Applications 2010, June 22, 2010, Vrnjacka Banja, (Serbia).
- ⑪ 矢島 幸信, 集合論から位相空間論へ(流れに逆らって), 第45回位相空間論シンポジウム, 2010年6月5日, 大阪府立大学。
- ⑫ 酒井 政美, A characterization for βX to be scattered, 第45回位相空間論シンポジウム, 2010年6月4日, 大阪府立大学。
- ⑬ 酒井 政美, Scheeper's conjecture and upper semicontinuous functions, 第44回位相空間論シンポジウム, 2010年5月31日, 島根大学。
- ⑭ 矢島 幸信, Normality follows from orthocompactness in products, General Topology シンポジウム, 2009年12月18日, 大分大学福祉教育科学部。
- ⑮ 家本 宣幸, Applications of elementary submodels to hyperspaces, General Topology シンポジウム, 2009年12月17日, 大分大学福祉教育科学部。
- ⑯ 酒井 政美, The Ramsey property for

$C_p(X)$, 一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究集会, 2009年10月15日, 京都大学数理解析研究所。

- ⑰ 大田 春外, Sequences of upper semicontinuous functions accompanying continuous functions, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月26日, 大阪大学。
- ⑱ Masami Sakai, Menger subsets of the Sorgenfrey line, 24th Summer Conference on Topology and its Applications, July 2009, (Czech Republic).
- ⑲ Yukinobu Yajima, The products of a monotonically normal space and a compact space and their normality, International Conference on Topology and its Applications, July 7, 2009, Hacettepe University, Ankara (Turkey).

[図書] (計1件)

- ① Yukinobu Yajima, Nova Science Publishers, Inc., Computational Mathematics : Theory, Methods and Applications (P.G. Chareton 編集), (2011年), 443 (353-386).

[その他]

ホームページ等
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

矢島 幸信 (YAJIMA YUKINOBU)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号 : 10142548

(2) 連携研究者

酒井 政美 (SAKAI MASAMI)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号 : 60215598

家本 宣幸 (KEMOTO NOBUYUKI)
大分大学・教育福祉科学部・教授
研究者番号 : 70161825

(3) 研究協力者

平田 康史 (HIRATA YASUSHI)
神奈川大学・工学部・非常勤講師
研究者番号 : 70375400