様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年３月３１日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2011
課題番号：２１５４０１５２
研究課題名（和文）　非負実数上の計算可能性解析
－ウォルシュ・フーリエ変換と分布の計算可能性－
研究課題名（英文）　Computable analysis on the nonnegative real line
—Walsh-Fourier transform and computability of distributions—

研究代表者
森　隆一（MORI TAKAKAZU）
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：００００６５８８０

研究成果の概要（和文）：ファイン計算可能関数の概念の定式化と単位正方形におけるフビニの定理の実効化を示した。確率分布の計算可能性と実効的収束の定式化を行い、対応する確率分布関数のファイン計算可能性と実効的ファイン収束との関係を調べた。また、特性関数の計算可能性と実効的収束との関係を調べ、ボッホナーの定理の実効化を与えた。

研究成果の概要（英文）：We formulated the Fine computability and prove the effectivization of Fubini's Theorem on the unit square. We defined computability and effective convergence of probability distributions, and investigated the relations to Fine computability and effective Fine convergence of the corresponding probability distribution functions. We also investigated the relation to computability and effective convergence of the corresponding characteristic functions. We proved an effectivization of Bochner's Theorem.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：計算可能解析、計算可能関数、実効的連続性、実効的収束関数列、計算可能確率分布、実効的収束確率分布列、実効的ウォルシュ・フーリエ解析

１．研究開始当初の背景

自然数 **N** から **N** への関数の計算可能性の定義はテューリング機械による定義、または、これと同等な再帰的関数として確立している。実数上の連続関数に対しては次の２つの定義が主流と考えられる。(i)はテューリング機械などの仮想機械によるもので、Weihrauch によるⅡ型機械によるⅡ型計算可能性が代表的なものである。もう１つは、Grzegorczyk 等により提唱され、Pour-El,Richards により定式化された、計算可能関数を(ii)(a)列計算可能性：計算可能

実数列を計算可能実数列に移す、(b)実効的連続性：連続率が再帰的関数で与えられることで定義する。両者とも関数の連続性を仮定しており、ハール関数やウォルシュ関数は簡単な関数で、ディジタル・プロセシングにおいても重要な関数であるにも関わらず、不連続関数であり、上記定義で扱うことはできない。

2 進距離に基づいて、[0,1)上におけるファイン計算可能関数と実効的ファイン収束の定義、および、ウォルシュ・フーリエ解析の実効化の試みは、森により始められた。この位相による連続性は、2 進無理点で連続で 2 進有理点で右連続なことと同値である。

測度の計算可能性に関しては、それほど多くの研究は為されていない。本研究に関連するものとしては、Weihrauch と彼の共同研究者による研究, および、Schroeder 等による研究が挙げられる。前者は[0,1]において、測度を連続関数の空間のデュアル空間の元とし、彼らの representation による計算可能性を定義したものである。後者は Boolean semi-algebra {(a,b]|a,b は有理数)を用いて representation による計算可能性を定義したものである。representation による計算可能性の議論では測度の実効的収束は直接的には扱われていない。

２．研究の目的

(1) R 上のファイン計算可能関数および実効的ファイン収束等のファイン計算可能性に関する定式化を確立する。

(2) R 上の確率分布の計算可能性と実効的収束の定式化を行う。

(3) (2)の結果と確率分布関数の計算可能性と実効的収束との関係を調べる。

(4) (2),(3)の結果と特性関数の計算可能性と実効的収束との関係を調べる。

(5) 単位区間上の分布とウォルシュ・フーリエ級数の関係を調べる。

(6) ウォルシュ・フーリエ変換の実効化の研究を行う。

３．研究の方法

研究の目的(1)について

ファイン位相を実数に拡張する。

研究の目的の(2),(3))について

(a) 分布の計算可能性と弱収束の実効化

(b) 分布関数のファイン計算可能性と分布関数の収束

研究の目的(4)については

特性関数の(一様)計算可能性と実効的一様収束

研究の目的(5)について

例について調べる。

研究の目的(6)について

(a) 一般化ウォルシュ関数のファイン計算可能性

(b) ウォルシュ・リーマン・ルベッグの定理の実効化

(c) ウォルシュ・フーリエ変換の逆変換(2 重積分公式)の実効化

４．研究成果

（１）ファイン計算可能関数の定式化の補足として、ファイン連続関数列については、ファイン収束は連続的ファイン収束と同値であることを示した。なお、実効的ファイン収束はファイン収束の実効化と考えられる。

（２） Brattka によるファイン計算可能関数のグラフは無限個の縮小写像によるフラクタルとして特徴づけられることを示し、若干の拡張を行った。

（３）（２）の例は、グラフ有向集合ともみなされること、および、グラフ有向集合が Markov-自己相似集合と同じであることを示した。他方ランダム反復アルゴリズムの理論を立てた。これによってグラフ有

向集合に対する新しい見方が与えられ、またランダム反復アルゴリズムに多くの拡張モデルがあることが判明した。

（４） 確率分布列$\{\mu_m\}$の計算可能性を任意のコンパクトサポートを実効的に持つ計算可能関数列$\{f_n\}$に対して、$\{\mu_m(f_n)\}$が計算可能実数列となることで定義する。

確率分布列$\{\mu_m\}$が確率分布μに実効的に収束するとは、任意のコンパクトサポートを実効的に持つ計算可能関数列$\{f_n\}$に対して、$\{\mu_m(f_n)\}$が$\{\mu(f_n)\}$に実効的に収束することで定義する。

また、関数列$\{f_n\}$が f に実効的各点収束するとは、任意の計算可能実数列$\{x_m\}$に対して、$\{f_n(x_m)\}$が$\{f(x_m)\}$に実効的に収束することで定義する。

以下において、$\{\mu_m\}$を確率分布列、$\{F_m\}\{\phi_m\}$を対応する分布関数列と特性関数列とする。また、μを確率分布、F ϕを対応する確率分布関数と特性関数とする。

定理１ $\{F_m\}$が列連続ならば$\{\mu_m\}$計算可能である。

$\{\mu_m\}$が実効的有界な密度関数を持つ場合には、以下の定理を得た。

定理２ $\{\mu_m\}$が実効的有界な密度関数を持つとき、$\{\mu_m\}$の計算可能性と$\{F_m\}$の計算可能性は同値である。

定理３ $\{\mu_m\}$が実効的有界な密度関数を持つとき、$\{\mu_m\}$がμに実効的に収束することと、$\{F_m\}$が F に実効的各点収束することとは同値である。

（５） 確率分布がポイント・マスを持つ場合は、対応する分布関数は不連続となる。分布関数がファイン連続となる場合に関して以下の定理を得た。なお、ファイン連続関数を扱うことは、不連続点を2進有理数に限ることに対応する。

定理１より少し強い結果として、

定理４ $\{F_m\}$が列ファイン計算可能ならば、$\{\mu_m\}$は計算可能である。

定理５ $\{F_m\}$が実効的ファイン連続とする。このとき、$\{\mu_m\}$が計算可能ならば$\{F_m\}$は列計算可能である。

任意の計算可能２進無理数列$\{x_m\}$に対して、$\{f_n(x_m)\}$が$\{f(x_m)\}$に実効的に収束するとき、$\{f_n\}$は f に実効的２進無理収束するという。

定理６ $\{F_m\}$と F は列ファイン計算可能とする。このとき、$\{F_m\}$が F に実効的２進無理収束すれば、$\{\mu_m\}$はμに実効的に収束する。

定理７ $\{F_m\}$と F は列ファイン計算可能で F は実効的ファイン連続とする。このとき、

$\{\mu_m\}$がμに実効収束すれば、$\{F_m\}$は F に実効的２進無理収束する。

（６） 確率分布の計算可能性と特性関数の計算可能性に関しては以下の定理を得た。

定理８ $\{\mu_m\}$が計算可能ならば、$\{\phi_m\}$は一様計算可能である。

定理９ $\{\mu_m\}$とμを計算可能とし、$\{F_m\}$と F はファイン計算可能とする。 このとき、$\{\mu_m\}$がμに実効収束すれば$\{F_m\}$は F に実効収束する。

定理１０ $\{\phi_m\}$とϕは計算可能とする。このとき、$\{\phi_m\}$がϕに実効収束すれば$\{\mu_m\}$はμに実効収束する。

定理１１ $\{\phi_m\}$が計算可能ならば$\{\mu_m\}$は計算可能である。

定理１２ ϕが計算可能分布の特性関数となるためには、次が成り立つことが必要十分である。 (i)正定値、(ii) 計算可能、(iii) $\phi(0)=1$

定理１０の応用として、成功する確率ｐが計算可能実数であるベルヌーイ試行に対して、de Moivre-Laplace の中心極限定理が実効的に成り立つ。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Mariko Yasugi, Masako Washihara, Sequential computability of a function-limiting recursion versus effective uniformity-, Scientiae Mathematicae Japonicae, 査読有, Vol.71, 2010, pp.331-341.

② Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Fine convergence of functions and its effectivization, Automata, Formal Languages and Algebraic Systems (World Scientific), 査読有, 2010, pp.139-162.

③ Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Fine-computable functions on the unit square and their integral, Journal of Universal Computer Science, 査読有, Vol.15, 2009, pp. 1264-1279.
http://www.jucs.org/jucs_15_6/fine_computable_functions_on

④ Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Hideki Tsuiki, Fine continuous functions and fractals defined by infinite systems of contractions, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 査読有, Vol. 5489, 2009, pp. 1264-1279.

⑤ Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Hideki Tsuiki, Random iteration algorithm for graph-directed sets, Proceedings of the Sixth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, Dagstuhl Research Online Publication, 査読有, 2009/2275, 2009, pp.245-256.
http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2009/2275/pdf/Tsujii.2275.pdf

⑥ Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Computability of probability distribution, Proceedings of the Sixth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, 査読有, Dagstuhl Research Online Publication, 2009/2270, 2009, pp.185-196.
http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2009/2270/pdf/Mori.2270.pdf

〔学会発表〕（計 7 件）

① Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Fine computability of probability distribution functions and computability of probability distributions on the real line, Computability and Complexity in Analysis (CCA2011), February 4, 2011, University of Cape Town, South Africa.

②八杉満利子, 極限再帰性という計算概念の基礎, 科学基礎論学会, 2010 年 6 月 13 日, 専修大学生田キャンパス.

③ Mariko Yasugi, Masako Washihara, On sequential computability of a function, Workshop on Constructive Aspects of Logic and Mathematics, Marth 10, 2010, 金沢エクセルホテル東急.

④ Mariko Yasugi, Computation in the limit - its image and philosophy behind -, Logic, Game Theory and Social Choice 6, August 29, 2009, 筑波大学.

⑤ Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Hideki Tsuiki, Random iteration algorithm for graph directed sets, CCA2009, August 21, 2009, University of Ljubljana, Slovenia.

⑥ Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Computability of Probability Distributions and Distribution Functions on the Real Line, CCA2009, August 21, 2009, University of Ljubljana, Slovenia.

⑦ Mariko Yasugi, Cognition of computation by limiting recursion, TF4-E Workshop, March 23, 2009, 京都産業大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

森 隆一 (MORI TAKAKAZU)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：00065880

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

辻井　芳樹 (TSUJII YOSHIKI)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：90065871

八杉　満利子 (YASUGI MARIKO)

京都産業大学・名誉教授

研究者番号： 90022277