

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 1 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540158

研究課題名（和文） 量子場の数理解析

研究課題名（英文） Mathematical Analysis of Quantum Fields

研究代表者

新井 朝雄 (ARAI ASAO)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80134807

研究成果の概要（和文）：スピン 1/2 の相対論的な荷電粒子はディラック粒子と呼ばれ、量子電磁場と相互作用を行う。この相互作用を記述する量子論的ハミルトニアン---ディラック---マクスウェル作用素---の数学的解析を行った。ディラック粒子の位置作用素に関する時間発展に対して積分方程式を導き、電荷をパラメーターとして、漸近展開公式を確立した。これと関連して、ディラック粒子のジグザグ運動の輻射補正を求めた。もう一つの重要な研究成果は、ディラック---マクスウェル作用素の非相対論的極限として得られる非相対論的量子電磁力学のハミルトニアンの実効ハミルトニアンの特長を詳しく解析し、水素原子における“ラムシフト”を数学的に厳密に基礎づけたことがあげられる。

研究成果の概要（英文）：A relativistic charged particle with spin 1/2 is called a Dirac particle and it interacts with the quantum radiation field. The quantum Hamiltonian which describes the interaction---the Dirac-Maxwell operator--- was analyzed mathematically. For the time development of the position operator of the Dirac particle, an integral equation was derived and asymptotic formulae were established in the charge as a parameter. Related to this, radiative corrections to the Zitterbewegung of the Dirac particle was computed. One of the other important results was spectral analysis of an effective Hamiltonian in non-relativistic quantum electrodynamics, which is obtained as a non-relativistic limit of the Dirac---Maxwell operator, where a mathematically rigorous foundation was given to the “Lamb shift” in the hydrogen atom.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物科学系

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：量子場，量子電磁力学，ディラック作用素，ハイゼンベルク作用素

## 1. 研究開始当初の背景

量子場の理論は、物理の理論としてはある

程度成功は収めているものの、数学的には現在もなお様々な問題を抱えている。この困難な状況は、別の見方をすれば、新しい数学へ

の道を開く機会を提供する。事実、量子場には、ほとんどあらゆる数学(特に、関数解析、作用素論、非可換幾何学、表現論、整数論、非可換確率論、無限次元解析学など)が関与していることが示唆され、それらを包括する未知の数学の存在が予想される。

量子場の理論のうち、重要なクラスの一つは相対論的量子場の理論であり、これについては、1950年代から本格的な数学的研究が開始され、そこから公理論量子場の理論と構成的量子場の理論という二つの流れが派生した。前者は、相対論的な量子場の理論がもつべき一般的な性質を公理系として設定し、そこから、数学的に厳密な演繹により、諸々の結果を導こうとするものである。他方、後者は、相対論的な量子場の具体的モデルを数学的に厳密な手法により構成し、その性質を調べようとするものである。しかしながら、時空が2次元、3次元の場合は、スカラー場のモデルが構成されたものの、4次元時空上の非自明なモデル(自由場と同等でないモデル)の存在を従来の方法で構成的に証明することはほとんど絶望的であることが1980年代のはじめに明らかになった。それ以来、相対論的な量子場のモデルの構成的研究は途絶えた。

一方、非相対論的な量子場のモデルの数学的研究も1970年代から開始された。非相対論的な量子場のモデルでは、相互作用において、運動量の大きい部分の寄与を小さくすれば(これを紫外切断という)、系のハミルトニアンは、しかるべきヒルベルト空間上の自己共役作用素として実現される場合が多い。そこで、問題は、ハミルトニアンの特異性を解析することであるが、この場合、系の強安定性を保証する基底状態の存在を示すことが重要な課題の一つになる。量子場の量子の質量が正の場合には、構成的量子場の理論で培われた手法を応用することにより、それほど難しく、基底状態の存在を証明することができる。しかし、光子のように量子の質量が0の場合は、基底状態の存在を示すことは長らく未解決の問題であったが、1990年代後半に Bach-Froehlich-Sigal, Arai (本研究代表者)・Hirokawa によりブレークスルーがもたらされ、この分野の研究は飛躍的に発展した。2000年代からは、再び、相対論的な量子場の理論の構築を目指して、相対論的な量子の粒子と量子電磁場との相互作用モデルが、本研究代表者により、開始された。本研究は、これらの研究の延長線上にあるものである。

## 2. 研究の目的

量子場の理論のうちで、物理的に非常に成功を収めたのは、物質と光(電磁波)との相

互作用を量子論的に扱う量子電磁力学である。この理論も、発散の困難と呼ばれる難点を有するが、Feynman, Tomonaga, Schwinger らによる「くりこみ理論」により、物理的に意味のある理論として復活し、多大な成功を収めたのである。それゆえ、量子電磁力学を数学的に研究することは最も重要な課題の一つである。このような観点から、本研究の主題の一つは、スピン1/2の相対論的荷電粒子が量子電磁場と相互作用を行うモデルをいろいろな角度から研究することである。

また、もう一つの課題として、非相対論的量子電磁力学の実効ハミルトニアンのスペクトル解析がある。

## 3. 研究の方法

上に言及した相対論的モデルを定義するハミルトニアンは、ある意味で特異であり、従来の作用素論の埒外にある。そこで、この作用素を含む、新しい作用素のクラスに対して、スペクトル理論を構築する必要がある。

抽象的には、クリフォード代数の表現と有限自由度の正準交換関係の表現から構成される自己共役作用素  $A$  (一般化された意味でのディラック作用素) とボゾンフォック空間上の第2量子化作用素  $H_b$  の和  $A+H_b$  を無摂動作用素とし、これに相互作用項  $H_I$  を加えてできる対称作用素  $A+H_b+H_I$  が第一の研究対象になる。特異性は、 $A$  が下にも上にも有界でないことから生じる。この困難を回避する一つの方法は、 $A$  に適当な作用素  $aB$  ( $a>0$ ) を加え、 $aB+A$  が下に有界になるようにすることである。これを作用素的正則化という。この場合、正則化された作用素  $aB+A+H_b+H_I$  について諸々の結果を出し、しかる後に  $a \rightarrow 0$  とする極限を考察するのである。これが基本的手法の一つである。

もう一つの主題である、非相対論的量子電磁力学の実効ハミルトニアンのスペクトル解析については、新しい摂動論を構築する必要がある。

## 4. 研究成果

ディラック粒子---電荷を有し、スピンが1/2の相対論的素粒子---と量子輻射場が相互作用を行う量子系の作用素論的解析を行った。その基本となるのは、系のハミルトニアンであり、これはディラック---マクスウェル作用素と呼ばれる。この作用素は3次元ディラック作用素と量子輻射場の自由ハミルトニアンの和を無摂動項とし、これに摂動項として、ディラック粒子と量子輻射場の相互作用を表す作用素を加えた形をもつ。ディラック作用素については、4次のエルミート行

列値関数をポテンシャルとする項が含まれている。今回の解析の主な対象は、ディラック粒子の位置作用素の時間発展，すなわち，そのハイゼンベルク作用素とその時間微分（速度作用素）である。解析にあたっての基本的仮定は次の二つである：(A.1)ディラック作用素は3次元ユークリッドベクトル空間上の無限回微分可能な関数で台が有界であるもの全体の空間上で本質的に自己共役である。(A.2)ディラック-マクスウェル作用素は、ディラック粒子のヒルベルト空間と量子輻射場のヒルベルト空間のテンソル積ヒルベルト空間のある稠密な部分空間上で本質的に自己共役である。これらの仮定が、ディラック粒子に作用するポテンシャルに対する適切な仮定のもとで成り立つことは以前の研究で証明してある (A. Arai, J. Math. Phys. 41(2000), 4271-4283)。主結果は次の通りである：

(R.1) ディラック-マクスウェル作用素が生成する強連続1パラメーターユニタリ群は、すべての時刻において、ディラック粒子の位置作用素の定義域を不変にする。

(R.2) ディラック粒子の位置作用素のハイゼンベルク作用素は、ディラック粒子の位置作用素とディラック行列の時間発展の強不定積分の和で表される。

(R.3) 速度作用素はディラック行列の時間発展によって与えられる。

(R.4) 時間発展に対して、結合定数  $q$  に関する漸近公式を導出した。

(R.5) ディラック粒子のジグザグ運動に関して  $q$  による漸近展開を導いた。

もう一つの重要な研究として、非相対論的量子電磁力学におけるハミルトニアンのある種のスケール極限として得られる実効ハミルトニアンのスペクトル解析を行ったことが挙げられる。この実効ハミルトニアンは、シュレーディンガー型作用素であるが、ポテンシャル項が、量子場との相互作用を無視したときのポテンシャルのガウス変換で与えられるという点が特徴的である。量子場の効果は、ガウス核の中に集約されていると解釈される。量子場の相互作用を無視したときの量子的粒子のハミルトニアンを  $H$ 、実効ハミルトニアンを  $H'$  とするとき、特に興味があるのは、ラムシフトと呼ばれるエネルギー固有値のずれを  $H'$  の固有値を用いて説明することである。実際、新しい摂動論を構築することにより、それが可能となった。また、 $H'$  のスペクトル特性を明らかにした。特に、離散固有値の有限性や無限性に関する条件を定式化した。

量子場の理論と関連して、時間作用素の研究を行った。時間作用素とは、ハミルトニアンを正準交換関係を満たす対称作用素のこ

とである。時間作用素には、通常の意味での時間作用素のクラスとより強い条件にしたがう強時間作用素とよばれるクラスがある。研究代表者は、代数的量子力学（代数的量子場の理論）の枠組みにおいて、強時間作用素の研究を行い、リウヴィリアンに関する時間作用素の概念を導入した。これにより、時間作用素の理論は、量子統計力学や代数的量子場の理論にも応用できるようになった。

また、一般の量子論的枠組みにおいて、離散スペクトルをだけを有するハミルトニアンが時間作用素をもつための必要十分条件を見出した。

ボース場と呼ばれる量子場は、無限自由度の正準交換関係の表現から構成される。近年、正準交換関係の一般化が非可換相空間の観点から研究されてきた。これは、従来のボース場の枠組みを超える理論を提供する可能性があるため、重要な課題の一つである。研究代表者は、任意の自由度の非可換相空間を考え、この代数のヒルベルト空間表現を考察した。特に、ヴァイル型の表現については、正準交換関係のヴァイル型表現の一意性に相当する定理が成立することを証明した。さらに、無限自由度非可換相空間を考察し、いくつかの性質を調べた。

本の執筆では、量子力学や量子場の理論に現れる汎関数積分法に関する厳密な数学的理論を提示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7件)

- ① Asao Arai , Spectral analysis of an effective Hamiltonian nonrelativistic quantum electrodynamics, Ann. Henri Poincare, 12(2011), 119--152.
- ② Asao Arai , Heisenberg operators of a Dirac particle interacting with the quantum radiation field, J. Math. Anal. Appl. 382 (2011) 714--730.
- ③ Asao Arai , Strong time operators in algebraic quantum mechanics and quantum field theory, RIMS Kokyuroku Bessatsu B16(2010), 1--13.
- ④ Asao Arai , Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian with discrete eigenvalues to have time operators, Letters in Mathematical Physics 87(2009), 67--80.
- ⑤ Asao Arai , Hilbert space representations of quantum phase spaces with general degrees of freedom,

RIMS Kokyuroku 1705 (2010), 51--62.

- ⑥ Asao Arai, On a general form of time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum, in Quantum Bio-Informatics IV (eds. L. Accardi, W. Freudenberg and M. Ohya), World Scientific Publishing Co., pp.41--50, 2011.
- ⑦ Asao Arai, Representations of quantum phase spaces with infinite degrees of freedom, Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory (eds. T. Hara, T. Matsui, F. Hiroshima), COE Lecture Note Vol. 30, Kyushu University, 2011, 92--102.

[学会発表] (計 11件)

- ① Asao Arai, Quantum fields and analytic number theory, Workshop on "Avoided? Crossing of Eigenvalue Curves", Kyushu University, March 7, 2012.
- ② Asao Arai, Spectral analysis of an effective Hamiltonian in nonrelativistic quantum electrodynamics, The 12th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, February 21, 2011, Tohoku University, Japan. Spectral analysis of an effective
- ③ Asao Arai, Rigorous derivation of the Lamb shift from an effective Hamiltonian in nonrelativistic quantum electrodynamics, Spectral and Scattering Theory and Related Topics, RIMS, Kyoto University, December 14, 2011.
- ④ Asao Arai, Mathematical aspects of conserved quantities in a general class of quantum systems, International Conference QBIC 2011, Tokyo University of Science, Noda Campus, March 7, 2011.
- ⑤ Asao Arai, Hilbert space representations of a non-commutative algebra indexed by a real anti-symmetric matrix, Sapporo Workshop on Non-Commutative Analysis and Applications to Complex Phenomena,

Hokkaido University, September 2, 2011.

- ⑥ Asao Arai, Some mathematical aspects of a Dirac particle interacting with the quantum radiation field, Workshop on the Theory of Large Coulomb System, National University Singapore, Institute for Mathematical Sciences, February 18, 2010.
- ⑦ Asao Arai, Time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum, International Conference QBIC 2010, Tokyo University of Science, Noda Campus, March 11, 2010.
- ⑧ Asao Arai, Philosophical aspects of time operators in quantum mechanics, Symmetry Festival 2009, Budapest University of Technology and Economics (BME), Budapest, Hungary, August 3, 2009.
- ⑨ Asao Arai, Representations of quantum phase spaces, International conference Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory, Nishijin Plaza, Kyushu University, Fukuoka, November 28, 2009.
- ⑩ 新井朝雄, 任意の有限自由度の量子相空間のヒルベルト空間表現について, RIMS 共同研究・京都大学基礎物理学研究所 研究会「量子科学における双対性とスケール」, 2009年11月4日~6日, 京都大学基礎物理学研究所. 講演日: 2009年11月4日.
- ⑪ 新井朝雄, 時間作用素のいくつかの側面について, 立命館大学談話会, 2009年9月16日.

[図書] (計 1件)

- (1) 新井朝雄, 『量子数理物理学における汎関数積分法』, 共立出版, 2010, 411頁.

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0件)
- 取得状況 (計 0件)

〔その他〕  
ホームページ等  
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

新井 朝雄 (ARAI ASAO)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80134807

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし