

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月29日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540161

研究課題名（和文） 弾性波の表示法の開発と基本性質の究明

研究課題名（英文） Development of representation of elastic waves and investigation of their fundamental properties

研究代表者

曾我 日出夫 (Soga Hideo)

茨城大学・教育学部・教授

研究者番号：40125795

研究成果の概要（和文）：

本研究の目的は、(1)「弾性波の表示法を開発しそれを逆問題に利用すること」および(2)「逆問題に関連する弾性波の基本性質を明らかにすること」である。

(1)は既に得ていた萌芽的なアイデアを発展させようとしたものであるが、予想以上の困難さがあることが判明した。しかし、結果的には当初の期待していた表示法を証明することができた。さらに、新しく得られた表示法と従来から知られていたものとの関係も詳細に解明できた。また、この表示法で表される弾性表面波（Rayleigh 波）の観測から残留応力の情報を得るといふ逆問題について、具体的なアルゴリズムを得た。これは残留応力の Rayleigh 波への影響を具体的に示す公式が得られた結果である。

(2)については、波のエネルギーに関する新しい知見を得たことがある。その1つは、「エネルギーは基本的には特性曲線上を伝わることを検証したことである。もう1つは、波動方程式における消散項がエネルギー減衰にどのような影響をあたえるか詳細に分かったことである。また、上記の表示法を利用することによって、ホイゲンスの原理の証明が従来知られているより広いクラスで可能であることが分かった。その他、当初予定していた「弾性方程式について一意接続性を証明すること」などには、一定程度見通しを付けることはできたが、期待していた成果は得られなかった。

研究成果の概要（英文）：

The purpose in this research is the following:

- (1) to develop a new representation of elastic waves and to apply this to inverse problems;
- (2) to investigate fundamental properties of elastic waves connected with the inverse problems.

The above (1) is an attempt to develop a primitive idea obtained previously into a detailed form. Although we have encountered an unexpected serious difficulty in this attempt, we succeed finally in proving the conjectured conclusion, and moreover make relation clear between the obtained representation and the known ones. Also we obtain an algorithm for an inverse problem to measure pre-stress from data of surface waves (Rayleigh waves) expressed by the representation. This is based on a formula which shows how the pre-stress depends on the velocity of the Rayleigh wave.

Concerning the above (2), we get new pieces of knowledge about the energy of waves. The one is verification that the energy propagates essentially along the characteristics. The other is precise estimation for influence of the dissipative terms to the energy decay. We show also the representation in (1) is useful to prove the Huygens principle for more extensive classes than previously known. Further, we have tried to prove the unique continuation property for the general elastic equation, as was planned, and get an idea for the proof. However, we do not accomplish this proof expected first.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式 弾性方程式 偏微分方程式 逆問題 散乱波

1. 研究開始当初の背景

これまで本研究代表者は、弾性波動方程式の散乱問題との関係で、弾性波の特徴を解析するとともに、その表示法を開発してきた。

弾性波動方程式は、ベクトル値関数が未知関数となっている連立方程式である。その意味で双曲型連立偏微分方程式の一種と言える。しかしながら、形式的にみれば弾性波動方程式は、2階の標準的なスカラー値波動方程式に似た形をしており、かなり特別な形をした方程式である。したがって、一般的な双曲型連立方程式では得られないような特徴的な性質を持つことが期待される。

本研究代表者は、連携研究者である川下美潮氏等と共同で、弾性波固有の Rayleigh 波の散乱について研究してきた (Comm. PDE 28 (2003) pp1437-1470, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006) pp5319-5350 他)。これらの研究の中で、弾性波を具体的に表示することを行った。さらに、波の表示について、複素解析を利用した新しいアイデアを得た (J. Math. Soc. Japan 55 (2003) pp395-404)。

本研究は、このアイデアを精緻化することとその逆問題などへの利用を目指している。さらに、これに関連して弾性波の基本性質を解析することを目指している。

2. 研究の目的

本研究では、一般弾性波動方程式において、解の表示法の開発と逆問題への利用を目指した。さらに、逆問題などで重要となる弾性波の基本性質を明らかにすることを目指した。具体的には次のようなことを行おうとした。

(1) 弾性波の表示法について、新しい方法の開発と従来のものの見直しを行う。さらに、それらを具体的な探査を想定した逆問題に利用する。

(2) この種の逆問題で重要となる弾性波動方程式の基本性質について整理究明する。

(1)では、本代表者が萌芽的に得ている新

しい表示法を、波の具体的情報が得やすいものに改良精緻化することを試みた。さらに、以前から波の表示法として知られている Fourier 積分作用素などについて、逆問題への利用という視点から、より具体性が得やすい構成法をつくることを目指した。また、これらの研究で得られる表示法を、何か具体的な探査を想定した逆問題に利用しようとした。

実際の探査をモデル化し数学として考察するとき、数学固有の課題が生じてくる。(2)では、この課題を整理するとともに、そのいくつかを究明することを目指した。

3. 研究の方法

全体に、理論的な解析を行うグループと応用的な解析を行うグループに分かれ、適時打ち合わせをしながら進めた。前者のグループは、研究代表者の曾我、連携研究者の川下氏 (広島大)、梅原氏 (茨城大)、梅津氏 (茨城大) で構成し、後者は、連携研究者の田沼氏 (群馬大)、代田氏 (愛知県立大) で構成した。全体的な統括は代表者曾我が行った。

2009年度は、主に基本事項の整理と課題の明確化に重点を置き、「波の表示法の確認」と「逆問題の課題の整理」を行った。

2010年度は、新しい「波の表示法」の開発とその逆問題への利用を試みようとした。しかし、年度途中で「波の表示法」について大きな課題 (既に得ていたアイデアに欠陥) があることが分かり、その解決に全力をあげることとなった。

2011年度は、当初「逆問題」の究明やそれに関連する「弾性方程式の基本性質」の解析を試みる予定であった。しかし、前年度から課題となった「『波の表示法』を完全なものにすること」を最優先して研究を進めた。その上で、この表示法を逆問題に利用すること

を目指した。さらに、本研究全体を通した諸成果を整理総括した。

4. 研究成果

(1) 「2. 研究の目的」で述べたように、本研究ではまず「弾性波の新しい表示法を開発すること」を目指したが、その過程で「既に得ていたアイデアに欠陥があること」が分かった。本研究で得られた成果は、まず、この「波の表示法」を完全なものにすることができたことである。同時に、この表示が既に得られていた Fourier 積分作用素による表示法とどのような関係にあるかも明らかにできた。

この表示法は、定数係数の方程式に対して以前得られていた「波の表示法」が (J. Math. Soc. Japan 55 (2003) pp395-404)、変数係数へ拡張できることを示したものである。この拡張は、従来から知られている擬微分作要素の漸近展開の方法を改良するだけではうまくいかない。何か本質的に新しいアイデアを導入しなければならない。

基本的なアイデアは、次の通りである。弾性波動方程式の境界値問題

$$L(x, y, D_x, D_y)u(x, y) = 0 \text{ in } x > 0, y \in \mathbf{R}^n, \\ u|_{x=0} = g(y)$$

の解 $u(x, y)$ は、次の積分を使って近似できるように思える。

$\int e^{iy\xi} \int e^{ixz} L(x, y, z, \xi)^{-1} dz g(\xi) d\xi$
 z に関する積分の経路を、行列 $L(x, y, z, \xi)^{-1}$ の極のいくつかを囲むように取り、その留数を計算することによって、さまざまなモード (例えば Rayleigh 波モード) の波を表示できるのではないかというのが基本的な発想である。

変係数の場合は、上記の積分に低階項を付け加えて漸近解を作ろうとするものである。この低階項がどのような形であればよいかを究明することが要点である。この究明で当初の見通しに大きな欠陥があることが分かったが、結局これを取り除くことに成功した。(後述学会発表参照)

従来、境界近くの弾性波の表示法には、Fourier 積分作用素の方法に Poisson 作用素のものを組み合わせた方法が一般的であった。本研究の表示法は、上記のように複素積分を使った新しい方法で、Fourier 積分作用素などによるものとは違ったアイデアによるものである。さらに、複素積分の留数を計算することによって、従来の Fourier 積分作用素によるものが得られることも明らかになった。ここでの表示法は本研究者周辺独自のものであり、国内外に類似のものはない。

本研究の表示法は、Fourier 積分作用素の方法では表示できなかった波の散乱状況が具体的に表せるものと期待される。この

期待のもとで、この表示法を逆問題の解析に応用しようと努力した。しかし、ある程度の見通しを付けることはできたが、具体的な成果を得るには至らなかった。

また、上記の表示法は留数計算する以前の積分表示になっていることを利用して、ホイゲンスの原理について従来より広いクラスで検証できることが分かってきた。しかしながら、厳密な証明を終えるところまでには至らなかった。

(2) 上記の解の表示法は、弾性波固有の Rayleigh 波を表示する場合に有用である。この関連で Rayleigh 波の考察が進展し、次のような成果を得た。これは、連携研究者である田沼一実氏の本研究での活動がもととなって、田沼氏周辺で最終的に究明したものである。

残留応力などにより弾性テンソルが摂動を受けたとき、表面波 (Rayleigh 波) にどのような変化が生じるかよく分かっていなかった。特に、複合材料のような非等方性のものについて具体的な解析は行われていなかった。この種の非等方性材料において、弾性テンソルの摂動が Rayleigh 波の位相速度にどのような影響があるか具体的に示すことができた。

この種の公式を、具体性をもって提示した研究はこれまでなかった。得られた公式は弾性体の逆問題に有用なものである。例えば、Rayleigh 波の速度を有限回観測することから、残留応力の状況を知ることができる。残留応力の主軸方向、およびその残留応力の主応力と主応力差を決定するアルゴリズムを提示することができた。(後述論文[1]参照)

(3) 「2. 研究の目的」で述べたように、本研究では「逆問題に関連する弾性波の基本性質を明らかにすること」も目指した。これに関する成果として、波のエネルギーがどのように伝わっていくか、次のような基本的な性質を証明することができた。これは、連携研究者である川下美潮氏の本研究での活動がもととなって、川下氏周辺で最終的に究明したものである。

近年非線型波動方程式の研究において Keel-Smith-Sogge の評価式と呼ばれるものがよく導入される。杉本氏によって、この種の評価式が成り立つメカニズムが限定された条件下で考察されていた。この考察をもっと広い条件下に拡張できることが川下氏と杉本氏によって明らかにされた。

この研究がもととなって、解の特異性のみならずエネルギーも基本的には特性曲線に沿って伝わること、および Keel-Smith-Sogge の評価式もこのエネルギーの伝わり方に影

響を受けたものあることが明らかになった。
(後述論文[2]参照)

(4) 「逆問題に関連する弾性波の基本性質を明らかにすること」の成果として、次のような結果も得られた。これは、連携研究者である川下美潮氏の本研究での活動がもととなって、川下氏周辺で最終的に究明したものである。

一般に、消散項が付くと解の局所エネルギーは減衰しやすくなり、消散項がないときよりも議論しやすくなると思われる。しかし、部分積分を用いるという基本的な手法で考えてみると、消散項の存在が議論をかえって難しくすることが明らかになった。さらに、部分積分を用いた方法では最善と思われる評価を得た。そのことで、従来の研究で仮定されていた条件を弱めることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

[1] Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man and Wenwen Du: Perturbation of phase velocity of Rayleigh waves in pre-stressed anisotropic media with orthorhombic principal part, (査読あり) Math. Mech. of Solids, published online May 16, 2012 as doi:10.1177/1081286512438882

[2] M. Kawashita and H. Sugimoto: Weighted energy estimates for wave equations in exterior domains, (査読あり) Forum Math. 23 (2011) 1217-1258.

[3] M. Kawashita and K. Suzuki: Local energy decay for wave equations in exterior domains with regular or fast decaying dissipations, (査読あり) SUT J. Math. 47 No.2 (2011) 143-159.

[学会発表] (計1件)

曾我日出夫 「Cauchy 積分を使った弾性波の漸近展開」日本数学会総合分科会 2011年9月30日 信州大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

曾我 日出夫 (Soga Hideo)
研究者番号: 40125795

(3) 連携研究者

田沼 一実 (Tanuma Kazumi)
群馬大学・工学部・准教授
研究者番号: 60217156

川下 美潮 (Kawashita Mishio)
広島大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 80214633

代田 健二 (Shirota Kenji)
愛知県立大学・情報科学部・准教授
研究者番号 90302322

梅津 健一郎 (Umezumi Kenji)
茨城大学・教育学部・准教授
研究者番号: 00295453

梅原 守道 (Umehara Morimichi)
茨城大学・大学教育センター・准教授
研究者番号: 40532164