

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月1日現在

機関番号：13101
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21540166
 研究課題名（和文） 解析関数空間上の作用素の特性を決定する有界解析関数の研究
 研究課題名（英文） Study of bounded analytic functions and associated operators on spaces of analytic functions
 研究代表者
 泉池 敬司（IZUCHI KEIJI）
 新潟大学・自然科学系・教授
 研究者番号：80120963

研究成果の概要（和文）：

（1） H^∞ 閉イデアルでその共通零点集合が極大イデアル空間の中で解析構造をもつ集合に含まれるとき、その閉イデアルの構造を決定した。特に可算個の関数で生成される閉イデアルの構造を決定し、性質の良い閉イデアルのテンソル積で表せることを証明した。（2） H^∞, h^∞ 上の荷重合成作用素のノルム位相に関する連結成分を決定した。（3） $H^2(D^2)$ において、Blaschke 積の列より生成される不変部分空間および逆不変部分空間のランクを決定することができた。

研究成果の概要（英文）：(1) It is determined the structure of closed ideals in H^∞ whose common zero sets are contained in the union set of nontrivial of Gleason parts in the maximal ideal space of H^∞ . Moreover it is proved that a countably generated closed ideal is a tensor product of simple closed ideals. (2) It is determined path connected components in the space of weighted composition operators on H^∞ and h^∞ with respect to the operator norm. (3) It is determined the rank of invariant and backward shift invariant subspaces of $H^2(D^2)$ associated with sequences of Blaschke products.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000円	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、基礎解析学

キーワード：関数解析、複素解析

1. 研究開始当初の背景

申請者の今までの研究の1つの柱は1変数 H^∞ の総合的研究で、特にイデアル構造、極大イデアル空間の位相構造、Blaschke 積、特異内部関数の研究を行ってきた。それらの研究により、有界解析関数の境界での挙動に

ついての情報は格段と多くなった。今置かれている1つの立場は、それらを不変部分空間の構造の研究や、有界解析関数をシンボルに持つ Hankel, Toeplitz 型作用素、乗法作用素や合成作用素等の研究に応用し、深化させていくことにある。

（1）2変数の Hardy 空間において、2つ

の変数の掛け算作用素 T_z, T_w を考えることができる。これらの作用素に共通の不変部分空間 M および逆不変部分空間 $N (= H^2 \ominus M)$ を分類する問題がある。この問題はかなり複雑であることが広く知られている。 M および N 上にこれらの作用素を制限して4つの基本的な作用素 $R_z = T_z|_M, R_w = T_w|_M, S_z = P_{NT_z}|_N, S_w = P_{NT_w}|_N$ を考えることができる、ここで P_M は M への射影作用素である。 M と N の持つ情報は全て、それぞれの作用素の組 (R_z, R_w) および (S_z, S_w) の性質の中に織り込まれていると考えることができる。その性質が最もよく反映されていると思われるクロス交換子 $[R_z, R_w^*] = R_z R_w^* - R_w^* R_z$ および $[S_z, S_w^*]$ は、多くの場合あまり大きくない作用素であることが R. Yang 氏により指摘されている。 $[R_z, R_w^*] = 0$ となるときの M は V. Mandrekar により Beurling 型、つまり $M = \phi H^2$, ここで ϕ は内部関数、となることが分かっている。これを出発点にして、 $[S_z, S_w^*] = 0$ となる N を中路、瀬戸氏と特徴付け、 $\text{rank}[S_z, S_w^*] = 1$ となるときの N も泉池(耕平)と特徴付けることができた。しかし $\text{rank}[R_z, R_w^*] = 1$ となるときの M はまだ完全には記述できていない。しかし泉池(耕)との共同研究で、その中に1変数 H^∞ 関数に関係する非常に興味深い例が含まれていることが分かった。 $\text{rank}[R_z, R_w^*] < \infty$ となるときの M を記述することを目的にする。

(2) H^∞ の合成作用素の研究は 2001 年に大野、B. MacCluer, R. Zhao 氏により始められ、代表者、細川、D. Zheng 氏の共同研究が加わって進められてきた。合成作用素の空間のノルム位相構造を調べるために、細川氏と合成作用素の差の本質ノルムの上からと下からの評価式を与えたが、本質ノルムそのものの値を決めることができなかつた。それにアプローチすることを念頭に、大野、J. Choa 氏と有界調和関数空間上の合成作用素の差の本質ノルムを決定した。その手法は、 H^∞ の合成作用素および荷重合成作用素の研究に応用できると考えている。

2. 研究の目的

解析関数空間は解析関数からなる Banach 空間の総称で、有界解析関数空間 H^∞ 、Hardy 空間 H^2 、Bergman 空間 L^2_a 等がある。それらの空間の重要性は、複素解析学の1つの大きな研究対象であるばかりでなく、Hilbert 空間上の有界線形作用素の研究ではその表現空間として利用され、複素解析の手法を用いて作用素論の問題に応用できる所にもある。その1つとして「無限次元の有界線形作用素は自明でない不変部分

空間を持つか」という大問題は、Bergman 空間においては基本的作用素の逆不変部分空間のある種の存在問題に置き換えられる。また解析関数空間上に色々な有界解析関数をシンボルに持つ線形作用素が定義されるが、それらの作用素の分類問題は H^∞ 関数の境界での挙動を記述する問題に置き換えられる。それらは元の解析関数空間にその性質が深く依存しており、解析関数空間の特徴を記述することにもなる。このように解析関数空間の研究は、関数解析と複素解析の境界領域の研究分野であり、その2つの分野を有機的に結びつけた魅力的な研究対象である。これらの状況から、不変部分空間の分類問題、合成作用素、乗法作用素、Hankel, Toeplitz 型作用素などが国内・外で盛んに研究が行われており、今後の研究の発展が期待されている分野である。その中で H^∞ の役割は特別に重要であると考えている。 $[H^\infty]$ 、[不変部分空間]、[合成作用素]がこの研究の要のトライアングルである。

(1) まず $\text{rank}[R_z, R_w^*] = 1$ となるときの M を完全決定する。最大の目標は今までの研究を通してたどり着いた2つのクロス交換子のランクの関係を表わす不等式

$$(\#) \text{rank}[S_z, S_w^*] - 1 \leq \text{rank}[R_z, R_w^*] \leq \text{rank}[S_z, S_w^*] + 1$$

を証明することである。その糸口として、 T_z, T_w に関して不変な部分空間 N について、 $Q_z = P_{NT_z}|_N, Q_w = P_{NT_w}|_N$ とするとき、 $\text{rank}[Q_z, Q_w] = 1$ となる N を完全記述することであると考えている。これと $\text{rank}[R_z, R_w^*] = 1$ となるときの M を完全決定することが鍵である。

また定数でない有界解析関数 $\phi(z), \phi(w)$ に対して、 $[R_\phi(z), R_\phi(w)^*] = 0$ は $[R_z, R_w^*] = 0$ と同値であることを泉池(耕)との共同研究で証明した。その上、 $[S_\phi(z), S_\phi(w)^*] = 0$ でありかつ $[S_z, S_w^*] \neq 0$ であるとき、 $S_\phi(z)$ は定数作用素になることを証明した。これらを手掛かりとして、 M と N の持つ性質の違いを作用素 R_z, R_w および S_z, S_w の中で追及していきたい。その過程において1変数の H^∞ 関数が重要な役目を果たすことが予想される。

(2) H^∞ の研究では閉イデアルの構造の研究を中心にする。

P. Gorkin, K. Izuchi, R. Mortini; Higher order hulls in H^∞ II, J. Funct. Anal. 177(2000), 107-129 で、閉イデアルと共通零点の位数との相互関係を研究した。共通零点集合から、組み紐理論のように幾何学的に定める非負整数値関数をうまく考えることにより、それが共通零点における零点の位数と一致することを示

したい。これは過去10年間の懸案の問題である。閉イデアルと組み紐理論のように幾何学的に決まる非負整数値関数との関係が明らかになると、 H^∞ の極大イデアル空間の解析構造を持つ部分の幾何学的な研究の視点が開かれる。どのように位相的に決まる非負整数値関数を定義し(既にそのアイデアはもっている)、その証明を行うのかはこの研究の独創的部分でありその結果の持つ意義は大きい。

(3) H^∞ の合成作用素の差の本質ノルムの値はまだ決定されていない。大野、J. Choa氏と有界調和関数空間上の合成作用素の差の本質ノルムを決定したアイデアを応用して、これを決定したい。荷重合成作用素の構造は少し複雑で、その研究はあまり進んでいない。この位相構造、特に連結成分を決定したい。

(4) 解析関数空間では本質的な問題は H^∞ の問題に帰着される。代表者は、新潟が H^∞ の研究の世界的な1つの拠点であると同時に、解析関数空間への応用の発信基地であると考えている。代表者による今までの H^∞ の研究結果を応用して、研究を行うことがここでの特徴であり独創的な点である。またそれが H^∞ の研究に反映され、研究を更に深く進めていくことができるなど総合的な取り組みが実際に実行できることが、大きな特徴であると考えている。

3. 研究の方法

(1) 2変数 Hardy 空間上の不変部分空間 M および逆不変部分空間 $N (= H^2 \ominus M)$ の分類の研究を行う。この研究は現在進行形で進めているので、今まで進めてきた研究体勢で行う。

①まず、 $\text{rank}[S_z, S^*_w] = 1$ となるときの N を完全決定する。そして本丸の目標は今までの研究を通してたどり着いた2つのクロス交換子のランクの関係を表わす不等式(＃)を証明することである。瀬戸氏、泉池(耕)との共同研究で、3年間でこれらを解決する。
②不変部分空間 M および逆不変部分空間 N 上の作用素 R_z, R_w と S_z, S_w の性質は似ているところもあり、そうでないものもある。今までの研究を通して $[R_z, R^*_w] = 0$ となる M と $[S_z, S^*_w] = 0$ となる N には相互関係はないことが分かっている。泉池(耕)との共同研究で、定数でない2つの有界解析関数 $\phi(z), \phi(w)$ に対して、 $[R_\phi(z), R^*_\phi(w)] = 0$ は $[R_z, R^*_w] = 0$ と同値であり、 $[S_\phi(z), S^*_w] = 0$ かつ $[S_z, S^*_w] \neq 0$ となる N に対しては、 $S_\phi(z) = cI$ となることを証明した。21年度中に $[S_z, S^*_\phi(w)] = 0$ でありかつ $[S_z, S^*_w] \neq 0$ となるとき、 $S_\phi(z) = cI$ かつ $S_\phi(w) = cI$ となるかを解明する。

(2) H^∞ の合成作用素の研究では荷重合成作用素の連結成分の決定を目指す。大野氏とは有界調和関数空間 h^∞ 上の合成作用素の差の本質ノルムを決定した。そこでの手法を応用して、 H^∞ の合成作用素の本質ノルムそのものの値を決めたい。また H^∞ 上の合成作用素の1次結合の本質ノルムを決定する。大野、細川氏との共著の論文で、荷重合成作用素の連結成分の研究をスタートさせた。これは少し複雑で平成23年度までの継続研究とし、大野、細川氏と共同研究を行う。

(3) P. Gorkin, K. Izuchi, R. Mortini; Higher order hulls in H^∞ II, J. Funct. Anal. 177 (2000), 107-129 で、閉イデアルの構造と共通零点の位数との関係を研究した。その頃、共通零点集合から幾何学的に決まる非負整数値関数をうまく定義して、共通零点における零点の位数が、その位相的な言葉で言い換えることができると考え研究をしたが、位相的な微妙さを乗り越えることができなかった。今回は時間をかけて取り組みたい。その解決へのプログラムはできているつもりである。

3つの課題はすべて1変数 H^∞ に関係する研究であり、 H^∞ に関する新たな研究課題と直面する可能性がある。しかし、この研究課題とかけ離れることはないと考えている。また特異内部関数の研究において、思いがけない方向に研究が進む可能性もあるが、本質的には H^∞ の構造の研究の範囲内である。代表者としては、 H^∞ に関係する研究課題が新たに出現してくることを期待しており、それがこの研究の1つの役目であると考えている。

4. 研究成果

2009年度の主な研究結果

1) 2変数のハーディ空間上の不変部分空間の研究で次の結果を得た。

①ルージン型の不変部分空間で、内部関数列がすべてブラシュケ積の列であるとき、その不変部分空間のランクはブラシュケ積の列の零点の重なり具合により完全に記述することができた。これは長年の研究課題の1つの解決である。(泉池耕平、泉池佑子との共同研究)

②新たに混合不変部分空間の概念を導入し、その研究を行った。そこ結果、サラソンによって導入されたドブランジュ空間の構造が特殊な混合不変部分空間に埋め込まれていることを発見した。(泉池耕平、内藤雅俊との共同研究)

(2) 単位開円板上の有界解析空間の研究で次の結果を得た。

①解析構造が導入されている集合に関連す

るプライマリー・イデアルの構造の研究を大きく発展させることができた。プライマリー・イデアルの零点の位数をその零点集合の幾何学的な量で完全に記述することができた。これはイデアル構造の今後の研究につながるものである。(泉池佑子との共同研究)

2010年度の主な研究結果

(1) バーグマン空間上の作用素の研究で次の結果を得た。

①アレマン・リヒター・サンベルグの定理の初等的な証明を与えた。(泉池耕平、泉池佑子との共同研究)

②逆シフト作用素に対して、準ワンダリング部分空間を定義して、アレマン・リヒター・サンベルグ型の定理を得た。(泉池耕平、泉池佑子との共同研究)

(2) 2変数のハーディ空間上の不変部分空間の研究で次の結果を得た。

①クロス交換子のランクに関する予想を、ある条件のもので証明した。(泉池耕平との共同研究)

②泉池・ヤンによって導入された部分空間の縁作用素に対して、アレマン・リヒター・サンベルグ型の定理を得た。(泉池耕平、泉池佑子との共同研究)

(3) 単位開円板上の有界解析空間の研究で次の結果を得た。

①解析構造が導入されている集合に関連するプライマリー・イデアルの零点の位数を、その零点集合の幾何学的な量で完全に記述することができた。(泉池佑子との共同研究)

②共通零点が解析構造が導入されている部分に含まれているとき、その閉イデアルの構造を決定できた。またそのときの零点の位数の特徴付けを与えた。(泉池佑子との共同研究)

2011年度の主な研究結果

(1) H^∞ の研究に関しては、次の結果を得た。これらは初期の目的が達成されたことを表している。

①閉イデアルでその共通零点集合が極大イデアル空間の中で解析構造をもつ集合に含まれるとき、その閉イデアルの構造を決定した。(泉池佑子との共同研究)

②特に可算個の関数で生成される閉イデアルの構造を決定し、性質の良い閉イデアルのテンソル積で表せることを証明した。(泉池佑子との共同研究)

③極大イデアル空間の中の QC -レベル集合の列の合併集合の閉包は、また QC -レベル集合の合併集合になることを示した。(泉池佑子との共同研究)

(2) H^∞ , h^∞ 上の荷重合成作用素の研究に関しては、次の結果を得た。これにより連結成分を決定する見通しが立った。

①ノルム位相に関する連結成分を決定した。

(大野修一、泉池佑子との共同研究)

② H^∞ 上の荷重合成作用素の和がコンパクト作用素になるときの特徴付けを与えた。

(大野修一との共同研究)

③ h^∞ 上の荷重合成作用素に関する研究の基礎を固めることができた。

(3) $H^2(D^2)$ の(逆)不変部分空間の研究に関しては、次の結果を得た。これも初期の目的が達成された。

①Blaschke 積の列より生成される不変部分空間および逆不変部分空間のランクを決定することができた。特異内部関数列より生成される不変部分空間および逆不変部分空間のランクを決定する見通しが立った。(泉池耕平、泉池佑子との共同研究)

②クロス交換子のランク1であるときの不変部分空間の一部が記述でき、今後の研究の方向性が確率できた。(泉池耕平との共同研究)

③ $H^2(D^2)$ の混合不変部分空間の概念を導入してクロス交換子のランクが有限になるとき、部分的に M を記述し、ある条件の下でクロス交換子のランク不等式が成立することを示した。(泉池耕平との共同研究)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計34件)

① Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Kou Hei; Izuchi, Yuko, Wandering subspaces and the Beurling type theorem III, J. Math. Soc. Japan, to appear, 査読有.

② Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Yuko, Gleason parts and countably generated closed ideals in H^∞ . Trans. Amer. Math. Soc., to appear, 査読有.

③ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Yuko; Ohno, Shuichi, Path connected components in weighted composition operators on h^∞ . Trans. Amer. Math. Soc., to appear, 査読有.

④ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Kou Hei; Izuchi, Yuko, Ranks of invariant subspaces of the Hardy space over the bidisk, J. Reine Angew. Math. 659 (2011), 101-139, 査読有.

⑤ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Yuko; Ohno, Shuichi, Weighted composition operators on the space of bounded harmonic functions, Integral Equations Operator Theory 71 (2011), no. 1, 91-111, 査読有.

⑥ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Kou Hei; Izuchi, Yuko, Blaschke products and the rank of backward shift invariant subspaces over the bidisk, J. Funct. Anal. 261 (2011), no. 6, 1457-1468, 査読有.

⑦ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Yuko, Factorization of Blaschke products and ideal theory in H^∞ , J. Funct. Anal. 260 (2011), no. 7, 2086-2147, 査読有.

⑧ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Kou Hei; Izuchi, Yuko, Wandering subspaces and the Beurling type Theorem I, Arch. Math. (Basel) 95 (2010), no. 5, 439-446, 査読有.

⑨ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Yuko, Factorization of Blaschke products and primary ideals in H^∞ , J. Funct. Anal. 259 (2010), no. 4, 975-1013, 査読有.

⑩ Izuchi, Kei Ji; Izuchi, Kou Hei, Rank-one cross commutators on backward shift invariant subspaces on the bidisk, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 25 (2009), no. 5, 693-714, 査読有.

[学会発表] (計 25 件)

① 泉池 敬司、泉池 佑子、大野 修一、Weighted composition operators on the space of bounded harmonic functions、日本数学会、東京理科大学、2012年3月27日

② 泉池 敬司、Sequential properties of the maximal ideal space of H^∞ 、日本数学会、信州大学、2011年9月30日

③ 泉池 耕平、Blaschke products and the rank of backward shift invariant subspaces over the bidisk、日本数学会、信州大学、2011年9月30日

④ 泉池 敬司、Gleason 部分に関連するの閉イデアルの構造、第50回実函数論・函数解析学合同シンポジウム、東京女子大、2011年8月9日

⑤ 泉池 敬司、泉池 佑子、Factorization of Blaschke products and primary ideals in H^∞ 、日本数学会、名古屋大学、2010年9月25日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

泉池 敬司 (IZUCHI KEIJI)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：80120963

(2) 研究分担者

羽鳥 理 (HATORI OSAMU)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：70156363
大野 修一 (OHNO SYUICHI)
日本工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20265367
泉池 耕平 (IZUCHI KOUHEI)
山口大学・教育学部・講師
研究者番号：90451434