様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25　年　6月　18日現在

機関番号：14401
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2012
課題番号：21540178
研究課題名（和文）分散型方程式の超局所解析・大域解析

研究課題名（英文）Microlocal analysis and global analysis of dispersive equations

研究代表者
土居　伸一（DOI SHIN-ICHI）
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号：00243006

研究成果の概要（和文）：

線形分散型方程式の解の性質(特に解の特異性)と方程式の表象の幾何との関連を研究した。モデルとしてユークリッド空間上で摂動された２次的ポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解の特異性の伝播について考察し，副産物として基本解の波面集合があるクラスの摂動により不変であるための条件を得た。また波動方程式の計量に空間的にコンパクトな摂動を加えとときの解作用素のノルムの時刻無限大での増大度について結果を得た（西谷・上田氏との共同研究)。

研究成果の概要（英文）：

We studied the relation between properties of solutions (in particular, singularities of solutions) to linear dispersive equations and geometry of symbols of the equations. As a model we considered propagation of singularities of solutions to Schrodinger equations with perturbed quadratic potentials and obtained a necessary and sufficient condition for the wavefront sets of the fundamental solutions to be invariant under some class of potential perturbations. We also obtained results on growth order of solutions to wave equations with spatially compact metric perturbations (joint work with T.Nishitani and H.Ueda).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式

１．研究開始当初の背景

ユークリッド標準計量に付随したラプラス作用素を主要部とし，非有界ポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解の特異性に関しては，1970 年代後半以来，多くの研究がある(例えば藤原，Zelditch[Ze], Weinstein, Treves, 谷島[Ya1,2]，大鍛治らの研究がある)。 これに対しユークリッド標準計量とは限らない計量に付随したシュレディンガー方程式の解の特異性の研究は，1995 年の Craig-Kappeler-Strauss [CKS]の仕事を境に本格化したといえる。

Craig らはユークリッド空間上で漸近的に平坦なリーマン計量に付随したシュレディンガー方程式を考え，測地流で時間負の方向に捕捉されない余接束の点(すなわちその点を通る測地流の軌道が時間を負の無限大に近づけると無限遠に近づくような点)で，解の超局所的滑らかさが初期値の減衰に応じて上昇すること(いわゆる超局所的平滑効果)を証明した。一方 1996 年土居[Do1]は一般の完備リーマン多様体上のシュレディンガー方程式に対して測地流に関する非捕捉性条件が崩れると超局所的平滑効果が生じないことを証明した。また Craig らの仕事の精密化として，1999 年 Wunsch[Wu]は関数に対して特異性とともに２次的な振動を記述する一般化された波面集合(2 次散乱波面集合という)を導入し，いわゆる散乱計量（これはユークリッド標準計量に漸近的に近い計量のある種の幾何学的一般化）に付随したシュレディンガー方程式に対して２次散乱波面集合の伝播定理を証明した。

これらの仕事が契機となり，より一般の漸近的に平坦なリーマン計量(あるいはその幾何学的一般化である散乱計量)に付随するシュレディンガー方程式の解の特異性(C^∞ 級，Gevrey 級，解析的な場合)の研究が進展した(例えば，土居[Do2-4]，Robbiano-Zuily, 梶谷-若林，梶谷-Taglialatela, Wunsch[Wu], Hassel-Wunsch, Burq, 中村，伊藤，Martinez-中村-Sordoni, 伊藤-中村らによる研究がある)。またそれに並行してリーマン多様体上のシュレディンガー方程式に対する解作用素の様々な関数空間の間で連続性の研究にも進展が見られた(例えば Burq-Gerard-Tzvetkov, Staffilani-Tataru, Robbiano-Zuily, Hassell-Tao-Wunsch, Bouclet-Tzvetkov, Yajima-Zhang らの研究がある)。

参考文献

[CKS] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, Comm. Pure Appl. Math. vol.48 (1995), 769-860. [Do1] S. Doi, Duke Math J. vol.82 (1996), 679-706. [Do2] S. Doi, Math. Ann. vol.318 (2000), no. 2, 355--389. [Do3] S. Doi, "Hyperbolicn Problems and Related Topics," 185-199, Grad. Ser. Anal., Internatinal Press, Somerville, 2003. [Do4] S. Doi, Commun. Math. Phys. 250 (2004), no. 3, 473-505. [Wu] J. Wunsch, Duke Math. J. vol.98 (1999), 137-186. [Ya1] K. Yajima, Commun. Math. Phys. vol.181(1996), 605-629. [Ya2] K. Yajima, Contemp. Math. vol.217 (1998), 49-68. [Ze] S. Zelditch, Comm. Math. Phys. vol.90 (1983), 1-26.

２．研究の目的

分散型方程式は，KdV 方程式，シュレディンガー方程式，薄板の方程式などを代表として含む偏微分方程式の重要なクラスである。本研究の大きな目的は，線形分散型方程式の解の超局所構造・大域構造を方程式の主表象およびより低次の表象の幾何との関連から解明することである。より具体的には，解の特異性の解析，解作用素の様々な関数空間の間での連続性の解析，基本解（またはパラメトリックス）の構成が目標となる。
その際，分散型方程式の典型であるシュレディンガー方程式を詳細に解析することが最も基本的である。以下項目別に説明する。

(1)ユークリッド空間上で実２次形式のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式に１次的な増大度をもつ摂動ポテンシャル(これを副主表象とみなす)を加えたものを考え，シュレディンガー作用素の主要部が非等方的な振動子を含む場合に，同じ初期値を持つ非摂動シュレディンガー方程式の解と比べて，摂動方程式の解の同時刻での特異性がどのように変化するか解明する。特に副主表象による解の特異性の伝播・弱い特異性の生成・およびそれらの相互作用が起こる機構を明らかにする。

(2) (1)と関連するがユークリッド空間上で実２次形式のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式に対して，任意のコンパクト台の滑らかなポテンシャル摂動を加えても，同じ初期値に対する摂動方程式の解の波面集合が非摂動の場合から変化しないための（実２次形式に関する）必要十分条件を求める。また，同上のシュレディンガー方程式に対して，任意のコンパクト台の滑らかなポテンシャル摂動を加えても基本解の波面集合が不変であるための必要十分条件を求める。さらに以上２つの場合に対し，１次的に増大するポテンシャル摂動を加えた場合，解の波面集合がどのように変化するか明らかにする。

(3) シュレディンガー方程式の測地流の幾何と解の大域構造との関連を研究するためのモデルとして，ユークリッド空間上での平坦な波動方程式に，空間的にコンパクトで時間的には全時刻に渡る計量に関する摂動を加え，解作用素のノルムが時刻無限大でどのような挙動をするか解明する（西谷氏，上田氏と共同研究)。

３．研究の方法

研究の目的の(1),(2)に関しては，適当に方程式を変換すると，純虚数値のワイル表象をもつ，評価の悪い１階擬微分作用素に対する時間に依存した発展方程式に帰着されるため，通常の意味での漸近解析を実行しようとしても破綻する。粗く言ってソボレフ指数１だけ増大させる作用素を法とした解析しか一般には期待できない。従って古典的な意味での解の特異性の伝播は強い特異性についてしか成立しない。

そこで３つの方針を考える。一つ目は，特異性を方向別に考え，どの方向の特異性に対し，古典的な意味での解の特異性の伝播が特異性の強さに関わらず成立するか解明するというものである。比較的容易なのは適当な十分条件を与えることであるが，必要条件とどの程度隔たりがあるかが問題となる。二つ目は，特異性をはかる尺度を通常の波面集合より粗いものに置き換え，余接空間より粗い相空間で特異性の位置を同定し，その系として波面集合の上からの評価を導くというものである。三つ目は，特異性が現れる様々な例を構成し，特異性の位置の同定の限界を示すことである。以上の方針のもと超局所解析的手法・関数解析的手法を合わせて研究を進める。

研究目的(3)に関しては，解作用素のノルムが，時間無限大で与えられた増大度をもつように，空間的にコンパクトで時間的には全時刻に渡る計量に関する摂動をうまく構成することが主眼である。そのためには陪特性曲線が特異な挙動をするような計量をいか見つけるかが重要あるが，この部分は先行結果(Colombini-Rauch, 2008)をもとに西谷が行った。それができれば，解作用素のノルムの下からの評価は，標準的な擬微分作用素の演算法により証明できる。次に解作用素のノルムの上からの評価については，下からの評価からのオーダーの誤差を認めると証明は容易であるが，下からと同じオーダーで評価するためには，方程式に適合した，修正されたエネルギーを導入する必要があり，この部分は土居が担当した。

４．研究成果

(1)摂動ポテンシャルが高々１次の増大度を持つ場合を考える．摂動方程式の解は自由方程式の解と比べて，強い特異性は古典的な伝播法則をみたす（つまり同時刻での解の特異性の変化は，主表象・副主表象から決まるある種の陪特性曲線に沿う伝播として記述できる）が，弱い特異性は古典的な伝播法則を必ずしもみたさない．弱い特異性を方向ごとに超局所化して考えると，古典的な伝播法則をみたさない方向は特殊な方向に限られる．さらにこの特殊な方向での弱い特異性を考えると，摂動に対する“適当な一般性の仮定”の下，主表象から決まる特定時刻Ｔをふくむ十分短い時間区間を選ぶと，“適当な初期値のクラス”に対して，時刻Ｔまでは弱い特異性に対しても古典的な伝播法則が成り立つが，時刻Ｔに摂動解に“新たな弱い特異性”が“一般には”生じ，時刻Ｔ以降，この新たな弱い特異性を古典的な伝播法則にしたがって移した集合上で摂動解は特異である．また減少するようなポテンシャル摂動を加えた場合には，解の弱い特異性の主要部を抽出することができる。

(2) ユークリッド空間上で実２次形式のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式に対して，任意のコンパクト台の滑らかなポテンシャル摂動を加えても同じ初期値に対する解の波面集合が不変であるための（実２次形式に関する）必要十分条件を求めた。さらにその条件の下では，１次的に増大するポテンシャル摂動を加えた場合，同じ初期値に対する解の波面集合の間には古典的な特異

性の伝播法則が成り立つことを確かめた。一方，同じタイプのシュレディンガー方程式に対して，任意のコンパクト台の滑らかなポテンシャル摂動を加えても基本解の波面集合が不変であるための必要十分条件は，上の条件より真に弱いものであることを発見した。さらにその条件の下では１次的に増大するポテンシャル摂動を加えた場合，基本解の波面集合の間に特異性の伝播法則が成り立つことを確かめた。

(3) シュレディンガー方程式の測地流の幾何と解の大域構造との関連を研究するためのモデルとして，ユークリッド空間上での平坦な波動方程式に，空間的にコンパクトで時間的には全時刻に渡る計量に関する摂動を加え，解作用素のノルムが時刻無限大で任意の増大オーダーになるようにできるかどうか研究し，増加オーダーが多項式オーダーまたは劣指数オーダーの場合に肯定的な例を構成した（以上は西谷・上田氏との共同研究）。

(4)大阪大学の他の研究者と協力し、当該研究分野と関連の深い国内外の研究者を招聘して下記の研究集会を開催し、議論を深めるとともに、当該分野の発展に寄与した。

Linear and Nonlinear Waves No.8
平成２２年９月１０日～９月１２日
大阪大学理学研究科

Linear and Nonlinear Waves No.9
平成２３年１１月２日～１１月４日
ピアザ淡海　滋賀県立県民交流センター

Linear and Nonlinear Waves No.10
平成２４年１０月３１日～１１月２日
ピアザ淡海　滋賀県立県民交流センター

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

Shin-ichi Doi, Tatsuo Nishitani, Hideo Ueda, Note on lower bounds of energy growth for solutions to wave equations, Osaka Journal of Mathematics, vol.49 (2012), 1065–1085, 査読有.

６．研究組織

(1)研究代表者

土居　伸一（DOI SHIN-ICHI）
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号：00243006

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

西谷　達雄（NISHITANI TATSUO）
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号：80127117

藤家　雪朗（FUJIIE SETSURO）
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：00238536