

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月25日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009年度～2011年度

課題番号：21540179

研究課題名（和文）領域の位相的性質に依存する流体及び電磁気現象の数学的構造の解明

研究課題名（英文）Clarification of the mathematical structure of fluid-dynamical and electromagnetic phenomena depending on topological properties of the domain.

研究代表者

柳沢 卓（YANAGISAWA TAKU）

奈良女子大学・理学部・教授

研究者番号：30192389

研究成果の概要（和文）：流体や電磁気に関わる現象には、その現象の生ずる領域の位相的性（すなわち、境界の連結成分の数や、穴の個数等）に強く依存すると思われる問題が多く現れます。本研究では、このような領域の位相的性質に依存する流体及び電磁気現象の奥に潜む数学的構造の解明を目指して、ベクトル場の分解定理と特異摂動法に基づく新たな解析手法の検討を行いました。

研究成果の概要（英文）：Several phenomena of fluid or electromagnetism seem to have close relation to topological properties of the domain in which the phenomena occur.

Here the topological properties of the domain mean, for example, the number of the inner boundary components and the genus of the outer boundary component of the domain. This research discusses new analytical methods based on the decomposition theorem of vector fields on the domain and the singular perturbation, aiming at clarifying the mathematical structure of such fluid-dynamical and electromagnetic phenomena depending on topological properties of the domain.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式

1. 研究開始当初の背景

境界つきベクトル場の分解定理は Weyl の先駆的な研究に始まり、その系であるところの Helmholtz 分解による非圧縮性流体の圧

力項の取り扱い、いまや Navier-Stokes 方程式の数学的解析におけるスタンダードな方法の1つとなっている。しかし、Helmholtz 分解においては調和ベクトル場が明示されていない為、領域の位相的性質を取り組むこ

とが出来ない。また、Weyl の結果も、ベクトル場が十分な滑らかさを持つと仮定している点で、弱解等の解析に適用するには不十分であった。研究代表者と連携研究者は、上記の問題点を克服するために分解定理の見直しを行い、次の2点を示した：

- (1) 有界領域上の調和ベクトル場全体のなす空間 (rel.de Rham cohomology) の基底の、具体的な楕円型偏微分方程式の境界値問題の解を用いた表示。
- (2) ある変分不等式を基にした、任意の L^r 空間 ($1 < r < \infty$) に属するベクトル場に対する Hodge 分解定理。

一方、特異摂動法も古くから多くの数学者によって研究されてきた重要な方法であり、研究代表者は平成13年 - 平成15年基盤研究(C)研究題目「特異摂動極限として流体及び電磁気学に現れる双曲系境界値問題」において、この特異摂動法を特に双曲系境界値問題に対する「適切な境界条件」を見出すための自然で強力な方法として取り上げ、境界層の発生を取り入れた形での線型化圧縮性 Navier-Stokes 流の非粘性極限定理を示した。更に、この方法は電磁流体の境界値問題に対しても有効であることが分かってきたが、残念ながら漸近解の構成に困難な点が現れ研究が中断していた。

しかし、最近、我々の得た分解定理を適切に用いることによりこの困難が解消される可能性があることに気づき、領域の位相的性質が漸近解の形に反映することも分かってきた。

以上の経緯により、分解定理に対して得た我々の知見と特異摂動法に対する研究で開発した漸近解析的手法を統合することにより、領域の位相的性質に依存する現象の新たな解析手法の提出が可能となるのではないかと、という本研究の着想に至った。

2. 研究の目的

流体や電磁気に関わる現象には、例えば

- (1) 境界を通して出入りする流量が既定値を取るような定常粘性流の存在に関わる問題、
 - (2) 完全導体壁の境界条件下における静(平衡)電磁場の存在に関わる問題、
- 等のように、その現象の生ずる領域の位相的性質(すなわち、境界の連結成分の数や、genusの個数等)に強く依存すると思われる問題が多く現れる。

本研究では、このような領域の位相的性質に依存する流体及び電磁気現象の奥に潜む数学的構造の解明を目指して、次の2つの方法：ベクトル場の分解定理と特異摂動法、を用いた新たな解析手法を探っていくこと

を第一の目標とする。更に、そこで得られた知見をもとに、非線型偏微分方程式に対する境界値問題の解全体のなす空間と領域の位相的性質との関係を捉える為の統一的方法の提示を目指す。

3. 研究の方法

次に挙げる具体的な問題に対して、分解定理と特異摂動法を個別にあるいは適宜組み合わせることにより、以下の計画に沿って研究を進める。

特に、対象とした問題に通低する数学的構造を明確にしていく中で、領域の位相的性質に強く依存する広汎な現象に対して適用可能な、統一的分析手法の提出を目指す。

(1) 非斉次境界条件下の定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題：

非斉次境界条件下での定常 Navier-Stokes 方程式の解空間の構造を明らかにすることが目的となるが、Leray によって示された「Flux の各境界成分上の積分値が0という仮定の下で解が少なくとも1つ存在する」という結果が基本的である。

Leray 以後、Hopf, Ladyzhenskaya, 藤田宏等による本質的な研究がなされてきたが、未だ適合条件として自然に現れる「Flux の全境界上での積分が0」という条件(以下GF条件と略記)の下で解が存在するか否かは分かっていない。

代表者と連携研究者は、改良した分解定理を用いることにより、境界データのソレノイダル拡張の調和ベクトル空間 (rel. de Rham cohomology) への射影成分のあるノルムが粘性よりも小さいという条件の下で(弱)解の存在を示した。これはLeray等の従来の結果を含むもので、領域の位相的性質と解の存在の関わりを明示した点が新しい。本研究ではこの結果をもとに次の点を明らかにする。

① 我々の上記結果を示す際に現れた、定常的非圧縮 Euler 方程式の解をテスト関数とするある変分不等式の意味と、その不等式より導き出される事実を整理する。特に、Navier-Stokes 方程式に付随する弱形式の coercive 性を保証する Leray の不等式との関係を明らかにする。

② 色々な対称性を領域に課した場合に、GF条件のみで解が存在するか否か、Lerayの不等式が成立するか否かを調べる。

(2) 特異摂動極限としての Maxwell 方程式の境界値問題および Navier の境界条件下での非粘性極限問題：

完全導体壁の境界条件下における平衡電磁場に対する境界値問題を、真空中におかれた導体の電気伝導係数を無限大にする特異摂動極限問題としてとらえる数学的枠組みを、領域の位相的特性を取り入れた形で構築

する。更に、Navier の境界条件下での非粘性極限問題を、分解定理を取り入れた形で考察する。具体的には次の点を明らかにすることを旨とする。

① 上記の数学的枠組みに適合する漸近解を構成する。その際、領域の位相的性質が漸近解の具体的な形にどのように関係するのかを明らかにする。

② 境界層方程式を導出することにより表面電流の存在と領域の位相的性質の関係を明らかにする。

(3) Div-Curl Lemma の一般化：分解定理の応用として、有界領域（更に一般的には境界付きコンパクト Riemann 多様体）上の大域的 Div-Curl Lemma を示す。

4. 研究成果

(1) 研究方法欄(1)①項に挙げた、定常的非圧縮 Euler 方程式の解をテスト関数とするある変分不等式をもとに、Leray の不等式が成立する為の1つの必要条件を導いた。更に、その必要条件は、Dirichlet 境界条件を満足する定常的非圧縮 Euler 方程式の解で、その圧力の各境界成分上の値が異なるものが存在することと同値であることを明らかにした。前半の結果は、次欄〔雑誌論文〕⑦において公表済みであり、後半の結果は同欄〔学会発表〕④において発表した。

(2) 「各内部境界成分をそれぞれ1つずつ含む領域内の超球が存在する」という幾何学的条件を満足する3次元以上の有界領域においては、Leray の不等式が成立する為の必要十分条件は、各境界成分上での Flux 積分が0となることであることを示した（次欄〔雑誌論文〕④）。

④。証明においては、回転群に関する Haar 測度を用いた竹下氏による方法を用いた。この結果は以前我々が3次元有界領域に対して行った議論に含まれていたテスト関数の構成に関する不備を訂正し、更にその主張を3次元以上の有界領域へと一般化したものとなっている。

本研究における種々の考察から、幾何学的条件を満たさない一般的な領域に対しても同様の主張が成立する可能性が高いことが推測でき、今後の研究方針への重要な示唆を得ることができた。また、この結果に対する Haar 測度を用いない初等的な別証明が与えられないか、という新たな研究課題も見出すことができた。

(3) 有界領域上の大域的 Div-Curl Lemma を我々の分解定理を用いることにより示すことが出来た（次欄〔雑誌論文〕⑥と⑧）。更に、この Div-Curl Lemma における div, rot 作用素

を、ある cancellation Property を持つ一階偏微分作用素の組に一般化出来ることが分かった。この一般化によって、境界つき n 次元 Riemann 多様体上での大域的 Div-Curl lemma も得ることができた（この部分は現在論文を投稿中）。

(4) ベクトル場の分解定理を示す際、我々は Dirichlet 積分に対応する2次形式の coercive 性のある変分不等式に置き換えるという方法を本質的に用いたが、これを抽象的に再設定し直すことにより、Lax-Milgram の定理の大域的一般化を示すことができた。この一般化により、①外部領域におけるストークス問題の可解性、②3次元有界領域における L^r -Helmholtz-Weyl 分解定理、③境界付きコンパクト Riemann 多様体上の L^r -de Rham-Hodge-Kodaira 分解定理、を統一的に示すことができた（この結果をまとめた論文は現在投稿中）。

(5) 有界領域上の Hodge 分解定理を用いることにより、ソレノイダルベクトル場を調和ベクトル場とベクトルポテンシャルの回転の和で表示する方法を定常的 MHD（磁気流体力学）方程式に適用した。このことにより、速度場と磁場に非斉次境界条件を課したときの解の存在に関する一結果を得た。この結果により、磁場境界データには GF 条件以外は何ら制限を課すことなく定常解の存在が示せることが明らかになった。速度場に対しては、そのソレノイダル拡張の調和ベクトル場への射影が（粘性係数と磁場抵抗係数に比べて）小さい等の制限が必要であったことと比較すると、この事実は MHD 方程式の1つの特徴を示していると考えられる（この結果は現在論文として取りまとめ中）。

(6) 一般の有界領域における、Navier の境界条件下での非粘性極限問題を考察した。特に、分解定理を取り入れることにより漸近解の構成を統一的に行うことが出来ないかを、半空間領域における既存の結果と対比しながら検討した。また、完全導体壁境界条件下の平衡電磁場の境界値問題を特異摂動極限としてとらえる為の数学的枠組みを、円環領域において考察した。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計8件）

- ① H. Kozono, R. Farwig, T. Yanagisawa. Leray's inequality in general multi-connected domains in \mathbb{R}^n , *Mathematische Annalen* (online first), 査読有, 2012,

DOI:10.1007/s00208-011-0716-6

- ② 柳沢 卓. 多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題, 研究集会 PPM2010 報告集 偏微分方程式と現象:PDEs and Phenomena in Miyazaki 2010, 査読無, 1, 2011, 10-1~10-9
- ③ N. Hayashi, K. Tomoeda, T. Yanagisawa. Analyticity for higher order nonlinear dispersive equations, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 査読有, 2010, Vol. 32, 111-130
- ④ H. Kozono, T. Yanagisawa. Leray's problem on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data, Math. Z., 査読有, 2009, Vol. 262, 27 - 39
- ⑤ H. Kozono, T. Yanagisawa, L^r -variational inequality for vector fields and the Helmholtz-Weyl decomposition in bounded domains, Indiana Univ. Math. J. 査読有, 2009, Vol. 58, 1853 - 1920
- ⑥ H. Kozono, T. Yanagisawa. Global DIV-CURL Lemma on bounded domains in \mathbb{R}^3 , J. Funct. Anal., 査読有, 2009, Vol. 256, 3847 - 3859
- ⑦ H. Kozono, T. Yanagisawa. Nonhomogeneous boundary value problems for stationary Navier-Stokes equations in a multiply connected domain, Pacific J. Math., 査読有, 2009, Vol. 243, 127 - 150
- ⑧ H. Kozono, T. Yanagisawa. Global DIV-CURL Lemma in 3D bounded domains, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, 2009, B14, 27-33

[学会発表] (計 16 件)

- ① Taku Yanagisawa. On global compensated compactness theorem, International Conference on Fluid and Gas Dynamics (招待講演), 2011年9月25日, Jinhua, China
- ② Taku Yanagisawa. Applications of Hodge decomposition to mathematical

fluid Dynamics, The 4th MSJ-SI: Non-linear Dynamics in Partial Differential Equations, 日本数学会, (招待講演), 2011年9月19日, 九州大学医学部記念講堂, 福岡市

- ③ Taku Yanagisawa. Boundary value problems of the stationary MHD equations and Navier-Stokes equations with Coriolis force, Partial Differential Equations in Mathematical Physics and their Numerical Approximation (招待講演), 2011年9月8日, Levico Terme (Trento), Italy
- ④ Taku Yanagisawa. On the stationary boundary value problems of the Navier-Stokes equations with in and out flow on the boundary, 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (招待講演), 2011年7月18日, Vancouver Convention Center, Canada
- ⑤ Taku Yanagisawa. The solvability of stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data, International Conference on Mathematical Fluid Mechanics and Biomedical Applications (招待講演), 2011年6月3日, Univ. of Ponta Delgada, Azores, Portugal
- ⑥ Taku Yanagisawa. The stationary Navier-Stokes equations under the inhomogeneous boundary conditions, International Workshop on Interaction between Mathematics and Fluid Mechanics, 2011年3月8日, 大阪大学 (吹田市)
- ⑦ Taku Yanagisawa. On global compensated compactness theorem, The 3rd Nagoya Workshop on Differential Equations (招待講演), 2011年2月14日, 名古屋大学 (名古屋市)
- ⑧ 柳沢 卓. 多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題, PDEs and Phenomena in Miyazaki 2010 (招待講演), 2010年11月21日, 宮崎大学 (宮崎市)
- ⑨ Taku Yanagisawa. Global compensated compactness theorem, Partial Diffe-

rential Equations and Mathematical Physics (招待講演), 2010年11月17日, 芝蘭会館 (京都市)

- ⑩ 柳沢 卓. 調和ベクトル場と流体力学等に現れる定常解, 青葉山勉強会 (第5回) (招待講演), 2010年6月11日, 東北大学情報科学研究科 (仙台市)
- ⑪ 柳沢 卓. ベクトル場の分解定理とその流体力学への応用, 乱流場と非線形構造—数学と流体力学の融合を目指して— (招待講演), 2010年4月24日, 東北大学数理科学記念館 (仙台市)
- ⑫ 柳沢 卓. Helmholtz-Weyl 分解とその応用, 日本数学会 2010 年度年会函数方程式論分科会特別講演 (招待講演), 2010年3月26日, 慶応義塾大学, 横浜市
- ⑬ Taku Yanagisawa. Asymptotic behavior of solutions to the viscous Burgers equation, Linear and Nonlinear Waves, No.7 (招待講演), 2009年11月5日, 大津市
- ⑭ Taku Yanagisawa. On the stationary Navier-Stokes equations in a 3D bounded domain under the non-homogeneous boundary condition, Conference on "Mathematical Physics and PDEs (招待講演), 2009年9月8日, Levico Terme, Trento, Italy
- ⑮ Taku Yanagisawa. (Part I) Leray's problems on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data I, (Part II) Leray's problems on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data II, (Part III) Leray's inequality in 3D domains, PDE seminar at Zhejiang Normal university (連続招待講演), 2009年5月18, 19日, Jinhua, China
- ⑯ Taku Yanagisawa. Blow-up criteria for smooth solutions of 3-D compressible Euler equations on a bounded domain, Topics of Fluid Dynamics (招待講演), 2009年4月9日, Brescia University, Brescia, Italy

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柳沢 卓 (YANAGISAWA TAKU)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号: 30192389

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

小菌 英雄 (KOZONO HIDEO)
東北大学・理学研究科・教授
研究者番号: 00195728