様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25　年 5　月 14 日現在

機関番号：15201
研究種目：基盤研究　(C)
研究期間：2009～2012
課題番号：21540181
研究課題名（和文）作用素関数の固有値分布と多項式系の研究

研究課題名（英文）The study of eigenvalue distribution of operator function and polynomials

研究代表者
内山　充（UCHIYAMA MITSURU）
島根大学・総合理工学研究科・教授
研究者番号：60112273

研究成果の概要（和文）：凹関数 f(t) による関数計算によって生成される作用素関数 f(X) の固有値分布についての成果を得た。具体的には　f(X+Y) の固有値を大きい方から k 個加えた値は f(X) + f(Y) のそれより小さくないということをすべての k について示した。また、ガンマ関数の主逆関数がPick 関数であることを示した。これらは共にProc. Amer. Math. Soc. から出版された。

研究成果の概要（英文）：We got some result on eigenvalue for an operator function f(X), where f is a concave function: precisely, the sum of eigenvalues of f(X+Y) from the largest through to k-th is not less than one for f(X)+f(Y) for every k. We have also shown that the principal inverse of the gamma function is a Pick function.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：作用素関数・固有値・作用素不等式・直交多項式・ガンマ関数・Pick 関数

１．　研究開始当初の背景

1982 年に Hansen-Pedersen によって確立された[0, ∞)上の非負の作用素凸関数（あるいは作用素単調関数）についての Jensen 不等式はこの分野の研究に大きな進歩をもたらした。国内においても、1987 年に古田氏による作用素不等式が発表され、続いて安藤氏によって関連した作用素不等式が証明された。
私は作用素単調関数の逆関数が作る集合の性質を研究し、新しい majorization の概念を導入することによって、これらを統一的に一般化することに成功していた。
2 つの非減少関数 f, g について

$$g(A) \le g(B) \Rightarrow f(A) \le f(B)$$

が成立するとき、即ち、$f(g^{-1})$ が作用素単調であるとき g を f の majorization と言い、$f(t) \preccurlyeq g(t)$ と書く。この定義を使うと、f が作用素単調であることは、$f(t) \preccurlyeq t$ と書ける。このことから分るように、majorization は研究の対象を、作用素単調関数という個々の関数から一般の非減少関数の組へと大きく広げる。ここで、数列についての古典的な (sub)majorization につい

て触れておく。
二つの減少数列 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ に関して
$a_1 + \cdot + a_k \le b_1 + \cdot + b_k$ $(1 \le k \le n)$
が成立するとき $\{b_i\}$ は $\{a_i\}$ の submajorization と言われる。この時
多項式 $g(t)=\Pi(t-b_i)$ は $f(t)=\Pi(t-a_i)$ の submajorization という。$g(t)$ は
$[b_1,\infty)$で正値単調増加であるから、この部分を$g_+(t)$とするとき、次のことを示していた。

$$f_+ \preccurlyeq g_+.$$

このことは私の定義した関数の majorization が古典的な数列(多項式)の submajorization を含むことを意味している。

エルミート行列 X の固有値を大きい順に並べたものを $\lambda_i(X)$ として、その k 番目までの和を$\sigma^k(X)$ と表す。X の変化(摂動)に対応する非線形写像$\lambda_i(X)$, $\sigma^k(X)$ の変化を解析、評価することは古くからなされていて、H.Weyl の研究がつとに有名である。

私は、作用素関数 f(X) の作用素不等式についての結果を得た後、f(X) の固有値分布に取り組み、次のことを示していた:

f(t) が凹関数で $X^*X+Y^*Y=I$ のとき、
$\sigma^k(f(X^*AX+Y^*BY)) \ge \sigma^k(X^*f(A)X+Y^*f(B)Y)$.
この不等式において、X,Y はスカラーとは限らないので、$\sigma^k(f(X))$ はかなり強い意味の凹性を持つことが分かる。他に Ando-Zhan は $(0,\infty)$上の作用素凹関数 f(t) について

$\sigma^k f(A+B) \le \sigma^k (f(A)+f(B))$ $(1 \le k \le n)$

を示していた。Bourin-Uchiyama はこの不等式が、f(t)が作用素凹関数だけではなくもっと一般に、単なる凹関数の場合に示した。これは大きな拡張であった。

2．研究の目的

当研究課題の目的は、上記の結果を次のように発展させることであった。

第一の目的: majorization による多項式系の研究. 多項式f(t),g(t) について
$f_+ \preccurlyeq g_+$. が成り立つための根の条件をより精密に求める。上記のように f(t),g(t) がともに実根のみを持つ場合に十分条件を得たが、必要性あるいは虚数解を持つ場合について解明したい。更に直交多項式系 $\{p_n\}$ の最大次の項の係数を正としよう。p_n は実根をもち重根がないことが知られている。このことから、p_{n+1} の最大の零点の右側にある正値増加部分は p_n のそれの新しい意味の majorization であることが分かる。是をもっと深く研究することを目的としていた。

第二の目的: 作用素関数の固有値分布と Fréchet 微分の研究:
まずは、f(X) の凹性、特に傾きの減少性を固有値によって調べることを目的の一つとした。次に、f(t) が作用素凹関数であるとき、 Fréchet 微分 Df(X) について

$$f(A+B) \le f(A) + Df(A)(B)$$

が作用素 A, B に対して成立するが、f(t) が一般の凹関数であるとき、A, B が行列の場合でも、上の不等式の 各辺の σ^k を評価・比較することは容易ではないと思える。更に、A, B がコンパクト作用素の場合に行列について得た結果を単純に適応できるかどうか定かではない。それは、Fréchet 微分 Df(X) の扱いが難しいからである。これを解明することを目的とした。

3. 研究の方法

膨大な過去・現在の研究結果を専門書・論文を通じて学び、その idea・手法を理解しそれを駆使して目的を果たすのが基本的な方法である。特に、私自身が考案した関数の間の majorization を発展させ応用した。また研究を持続的に継続するために、国内外の研究集会に出席し、成果を発表するとともに、他の研究者との意見交換を通じて motivation を高めることも大切なことであった。

４．研究成果

数学のみならず自然科学で大切なガンマ関数 $\Gamma(t)$ についての発見があった。$0< t < \infty$における$\Gamma(t)$ が最小値となる点を αとすれば、$1<\alpha<2$ であり、$[\alpha,\infty)$において$\Gamma(t)$は非負単調増加である。 $\Gamma(t)$ のオイラー表現によって、$\log\Gamma(t)$ はその解析的性質が分かりやすくなり、その導関数はディガンマ関数あるいはプシイ関数と呼ばれている。私はこの表示に以前から着目していた。そして、$[\alpha,\infty)$における$\Gamma(t)$の逆関数は作用素単調ではないかと予想していた。しかしこのことを証明する idea を長い間思いつかなかった。ところが思わぬところから有効な idea に気づいた。それは、Bhatia-Sano の作用素凸関数についての定理を拡張しようとして、Horn, Fitzgerald 等が開発した conditionally positive definite の概念を勉強していた時であった。この概念とそれに関する結果がガンマ関数 $\Gamma(t)$にも使えるのではないかと閃いた。実際この方法で、$[\alpha,\infty)$における$\Gamma(t)$の逆関数は作用素単調であることを示すことができた。この結果は Proceeding of Amer. Math. Soc. から出版された。

直交多項式系 $\{p_n\}$ の最大次の項の係数を正としよう。このとき、p_{n+1} の最大の零点 a_{n+1} の右側にある正値増加部分－p_{n+1} を$[a_{n+1}, \infty)$ に制限した部分－は p_n のそれの majorization であることが分かっていた。p_n の導関数の最大の零点を b_n とすれば、$b_n < a_n$ であり、p_n を$[b_n, \infty)$ に制限した部分は上記の正値増加部分を含む。その逆関数を p_n の主逆関数と呼び、p_n^{-1} と書く。是が作用素単調関数ではないかと予想し正しいと確

信できる根拠はあったのであるが、それを示す方法が見つからなかった。
このことについても上記の conditionally positive definite の概念を用いて証明することができた。この結果は J. Mathematical Analysis and Application から出版された。その他に、Petz-Hasegawa の定理と呼ばれている作用素単調関数に関する証明を分かりやすくし、拡張した。また、作用素方程式についての Bhatia との共著論文も出版された。
2010 年インドで開催された４年に一度の国際数学者会議の Satellite Conference の基調講演を行った。そして、2011 年早稲田大学における日本数学会で企画特別講演を行った（震災で中止）。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（15 件）

(1)M.Uchiyama,A converse of Loewner-Heinz inequality, geometric mean and spectral order, Proc. Edinburgh Math. Soc. 査読有, 掲載確定.

(2)M. Uchiyama, M. Seto, Inequality between unitary orbits, C. R. Sci. Paris, Ser.1, 査読有, 掲載確定.

(3)S.S. Dragomir, M. Uchiyama, Some inequality for power series of two operators in Hilbert space, Tokyo J. Mathematics, 査読有, 掲載確定.

(4)M.S.Moslehian, H. Najafi, M. Uchiyama, A normal family of operator monotone functions, Hokkaido Math. Journal, 査読有, 掲載確定.

(5)M. Uchiyama, Operator monotone functions,Jacobi operators and orthogonal polynomials, J. Math, Anal. Appl. 査読有, 401 (2013), 501-509.

(6)M. Uchiyama, The principal inverse of the gamma function. Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, 140(2012)1343-1348.

(7)M.Uchiyama, A new look at Gamma function, 数理解析研究所講究録「作用素論における非可換構造の研究とその応用」査読無, 1737(2011)133-139

(8) H. Kosaki, Positive definiteness of functions with applications to operator norm inequalities. Mem. Amer.Math. Soc. 査読有 997(2011)

(9) M. Uchiyama, Operator monotone functions, positive definite kernel and majorization, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有,138 (2010) 3985-3996.

(10) M. Uchiyama, Majorization and some operator monotone functions. Linear Algebra Appl. 査読有,432 (2010) 1867–1872

(11)M.Uchiyama, Positive definite kernels and majorization, 数理解析研究所講究録「作用素論における非可換解析学の展望」査読無, 1678(2009) 97-105.

(12) M. Uchiyama, A new majorization induced by matrix order. Oper. Theory Adv. Appl. 査読有, 187(2009) 211-216,

(13) R. Bhatia, M. Uchiyama The operator equation $\Sigma\ A^{n-i}\ XB^{i}=Y$, Expo. Math. 査読有, 27 (2009) 251-255.

(14) M. Seto, Infinite sequences of inner functions and submodules in $H^2(D^2)$, J. Operator Theory, 査読有,61 (2009), 75-86.

(15)M.Enomoto,Y.Watatani, Indecomposable representations of quivers on infinite dimensional Hilbert spaces. J. Funct. Anal. 査読有, 256 (2009),959-991

〔学会発表〕（10 件）

(1)M. Uchiyama, 直交多項式の主逆関数,日本数学会, 2013 年 3 月 22 日,京都大学(京都市)

(2)M. Uchiyama, Operator monotone functions and polynomials, Matrices and Operators, 2012 年 12 月 28 日、Indian Institute of Science, Bangalore(インド)

(3)M. Uchiyama, 作用素単調関数, Jacobi 作用素, 直交多項式, 「作用素論・作用素環論研究集会」,2012年 11月24日, 大阪教育大学（大阪市）

(4)M. Uchiyama, The principal inverse of the gamma function, 日本数学会, 2012年9月20日、九州大学（福岡市）

(5)M. Uchiyama, The principal inverse of the gamma function, Operator Theory and its applications, 2011年8月26日, Kyungpook National University（韓国）

(6)M. Uchiyama, Loewner の定理と応用ー行列順序、多項式系、ガンマ関数、Korovkin の定理-日本数学会（企画特別講演）2011年3月22日,早稲田大学(東京)

(7)M.Uchiyama, A new look at Gamma function, 「作用素論における非可換構造の研究とその応用」2010年10月29日, 京都大学数理解析研究所（京都市）

(8)M. Uchiyama, Matrix functions, Majorizations and Orthogonal polynomials , ICM Satellite conference "Functional Analysis and Operator Theory"（招待・基調講演）2010年8月10日, Indian Statistical Institute at Bangalore（インド）

(9)M. Uchiyama, Operator monotone functions, positive definite kernels and majorization, 16th Internatinal Linear Algebra Society, 2010年6月23日 Pisa（イタリア）

(10)M.Uchiyama, Positive definite kernels and majorization, 「作用素論における非可換解析学の展望」2009年10月30日, 京都大学数理解析研究所（京都市）

６．研究組織

(1)研究代表者

内山　充（UCHIYAMA MITSURU）
島根大学・総合理工学研究科・教授
研究者番号：60112273

(2)研究分担者

(　　)
研究者番号：

(3)連携研究者

幸崎　秀樹（KOSAKI HIDEKI）
九州大学・数理科学研究院・教授
研究者番号：20186612

綿谷　安男(WATATANI YASUO)
九州大学・数理科学研究院・教授
研究者番号：00175077

瀬戸　道生(SETO MICHIO)
島根大学・総合理工学研究科・准教授
研究者番号：30398953