

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 5 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540187

研究課題名（和文） ディラック作用素のスペクトル構造の解析

研究課題名（英文） Analysis of the spectral structure of Dirac operators

研究代表者

伊藤 宏 (ITO HIROSHI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：90243005

研究成果の概要（和文）：遠方で発散する伸長解析的なポテンシャルをもつ相対論的ハミルトニアンのスペクトルの性質および非相対論的極限を調べた。特に、光速が十分大きい時には、ある2つのシュレーディンガー作用素のレゾナンスの近くに、ディラック作用素のレゾナンスが現われることを証明した。解析は、この研究で証明したある抽象的な定理をもとにしている。この定理は、ある種の閉作用素の族の境界値で定義される自己共役作用素のスペクトルの性質を調べるのに有用である。

研究成果の概要（英文）：We have investigated the spectral property and the nonrelativistic limit of the relativistic Hamiltonians with a dilation analytic potential diverging at infinity. In particular, we showed that resonances of the Dirac operator appear near resonances of some two Schrodinger operators if the speed of light is sufficiently large. The analysis is based on an abstract theorem proved in this work. The theorem is useful to determine the spectral property of a self-adjoint operator defined as a boundary value of some analytic family of closed operators.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析，数理物理，スペクトル理論

## 1. 研究開始当初の背景

相対論的量子力学に現われるディラック作

用素のスペクトル解析は、非相対論的量子力学に現われるシュレーディンガー作用素と

同様に、数理解物理学や解析学において興味深い対象として多くの研究がなされてきた。

ところで、光速を無限大にする非相対論的極限では、ディラック作用素はシュレーディンガー作用素に近づくと考えられてきた。実際、遠方で減衰するポテンシャルをもつ場合には、ディラック作用素とシュレーディンガー作用素のスペクトル構造は類似しており、研究の方法も類似している場合が多かった。

ところが、ポテンシャルが遠方で無限大に発散する場合は、様相が大きく変わる。大雑把に言うと、ディラック作用素のスペクトルは実軸全体の絶対連続スペクトルのみであるが、シュレーディンガー作用素は離散固有値しか持たない。この現象を数学的に理解するために、Veselic は「スペクトル集中」の立場で射影作用素の極限を考え、伊藤宏(研究代表者)と山田修宣(連携研究者)は、その結果を発展させた。一方、「レゾナンス」の立場では、Amour-Brummelhuis-Nourrigatにより、光速が十分大きい場合には、ある高エネルギー領域では、シュレーディンガー作用素の離散固有値の近くにディラック作用素のレゾナンスが存在することが証明されていた。しかし、このスペクトル構造の劇的な変化について詳しい解析は行われていなかった。

## 2. 研究の目的

遠方で無限大に発散するポテンシャルをもつディラック作用素と同じポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素を考える。従来の結果では、非相対論的極限におけるスペクトルの劇的な変化やディラック作用素のレゾナンスがシュレーディンガー作用素の固有値の近くに存在することは十分説明出来ない。そこで、この2つの作用素の間に2種類の相対論的シュレーディンガー作用素を介在させることで以下の2つの問題の解決することが主目的である。

(1) スペクトル構造がまったく異なるディラック作用素とシュレーディンガー作用素を総合的に扱うことのできる新しい視点を見つけることで、非相対論的極限におけるスペクトルの劇的な変化を明快に説明すること。

(2) 磁場を加えたときのスペクトルの構造の変化を理解すること。

## 3. 研究の方法

(1) 「解析セミナー」、「作用素論セミナー」、「夏の作用素論シンポジウム」、「実函数論・函数解析学合同シンポジウム」、「超局所解析と古典解析」などのセミナーやシンポジウムに参加し、関連する研究の情報収集や連携研究者など他の研究者との研究連絡を行った。「解析セミナー」、「夏の作用素論シンポジウム」、「超局所解析と古典解析」では研究成果を発表した。

(2) 課題研究のために必要な書籍やパソコンを購入した。パソコンを用いて、インターネットによる情報収集や研究者間の研究連絡、また論文作成等を行った。

(3) 研究代表者や連携研究者は、以下の役割分担で課題研究やその周辺に関する研究を行った。

① 伊藤 宏：

相対論的ハミルトニアン作用素のスペクトルの解析と非相対論的極限を解析、全体のとりまとめ。

② 山田修宣：

相対論的ハミルトニアンのスペクトルの解析と非相対論的極限を解析。

③ 田村英男：

電磁場をもつシュレーディンガー作用素のレゾナンスの非存在領域とアハラノフ・ボーム効果との関係を解析。

④ 野村祐司：

周期的なデルタ型磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトルの解析。

⑤ 峯拓也：

周期的なデルタ型磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトルの解析。

⑥ 岩塚朗：

3次元トーラス内に閉じ込められている磁場をもつシュレーディンガー作用素のある種の極限の解析。

⑦ 門脇光輝：

消散項をもつ波動方程式の解析。

## 4. 研究成果

研究代表者(伊藤)および連携研究者(山田)による主な成果を以下に述べる。また、この成果に特に関連すると思われる連携研究者による成果についても記載する。

(1) 研究代表者の伊藤宏と連携研究者の山田修宣は、相対論的ハミルトニアンのスペクトル解析を行った。

遠方で無限大に発散する電場ポテンシャル  $V(x)$  をもつディラック作用素  $D(c)$  を考える。ただし、 $c$  は光速である。また、ポテンシャルは多項式のオーダーで発散し、伸長解析性を仮定する。このとき、ディラック作用素のスペクトルは実軸全体であり、さらに仮定を加えることで、そのスペクトルは絶対連続であることが知られている。一方、同じポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素  $S$  のスペクトルは離散固有値のみからなり、両者のスペクトル構造はまったく異なったものとなっている。一方、非相対論的極限では、ディラック作用素はシュレーディンガー作用素の適当な意味で近づくと考えられている。非相対論的極限におけるディラック作用素のスペクトルからシュレーディンガー作用素のスペクトルへの劇的な変化、お

よびディラック作用素のレゾナンスについて、以下の結果を得た。

① ある種の解析性をもつ閉作用素値関数の境界値として定義される自己共役作用素は、2つのタイプ（タイプ I, タイプ II）に分類されることを証明した。タイプ I の作用素は離散固有値のみからなり、タイプ II の作用素は、実軸全体がスペクトルとなる。

② ディラック作用素  $D(c)$  およびそれを FWT 変換することで主要部として得られる2種類の相対論的シュレーディンガー作用素のスペクトル構造を①の結果を用いて明らかにした。1つの相対論的シュレーディンガー作用素はタイプ I であり、もう一方の相対論的シュレーディンガー作用素およびディラック作用素はタイプ II である。

③ 非相対論的極限におけるスペクトルの劇的変化を以下のように説明した：ディラック作用素の実軸全体のスペクトルはタイプ II の相対論的シュレーディンガー作用素のスペクトルが素となっている。タイプ I の相対論的シュレーディンガー作用素の離散固有値は、摂動により実軸から離れ、ディラック作用素のレゾナンスとなる。非相対論的極限においてそのレゾナンスが実軸に戻ってきてシュレーディンガー作用素の離散固有値になる。

④ 有界な複素平面領域においては、光速が十分大きいときには、ディラック作用素のレゾナンスは存在しない。

⑤  $-V(x)$  をポテンシャルとしてもつシュレーディンガー作用素（本質的自己共役とは限らない）のレゾナンスの近くに、光速が十分大きいときには、ディラック作用素のレゾナンスが存在する。

⑥ その後の研究で、「光速が十分大きい場合には、ディラック作用素のレゾナンスは存在するとすれば、 $mc^2$  の近くに頂点をもつある錐と  $-mc^2$  の近くに頂点をもつある錐の中にある。すなわち、それ以外には、レゾナンスは存在しない。」ことが分かった。

磁場をもつディラック作用素の場合は、まだ成果を得ることは出来なかった。また、光速が十分大きい場合に、ディラック作用素のレゾナンスの個数が無限個であると予想したが、現在のところ証明をすることが出来なかった。このように、ディラック作用素のレゾナンスやスペクトル解析については、未解決の様々な問題が残っており、今後これらの問題を中心に研究を進展させることが必要と思われる。

(2) 連携研究者の山田修宣は、non-extreme Kerr-Newmann 距離のはいった空間でのディ

ラック作用素を考察した。この作用素は、ブラックホールの近くでの電子の状態を記述する。その作用素の自己共役性および時間に関する減衰を共同研究者とともに証明した。また、この作用素についての極限吸収原理を証明した。

(3) 連携研究者の田村英男は、アハラノフポーム効果がレゾナンスに与える影響を調べるために、次のような2次元シュレーディンガー作用素を考えた：コンパクトな台をもつ2つの電場ポテンシャルとコンパクトな台をもつ磁場をもち、電場ポテンシャルの間に磁場の台がある。これら3つの台が十分離れているとする。このとき、実軸からある距離以上離れた下平面にはレゾナンスが存在しないことを証明した。最近の研究では、レゾナンスの存在を証明しており、これらの結果から、この距離(resonance width) は、精密な結果であると考えられている。また、この距離は磁束に依存しており、アハラノフポーム効果と関係するものと考えられる。

(4) 連携研究者の野村祐司と峯拓矢は、二次元平面上の一樣磁場と周期的 Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルを考察し、基本領域内の磁束の量によって、ランダウ準位の存在条件を記述した。特に、磁束の量がある特別な値の時には、第二ランダウ準位の近くに絶対連続スペクトルが現れることを示した。

(5) 連携研究者の門脇光輝は、他の共同研究者とともに、帯状領域での消散項をもつ波動方程式を考え、ポテンシャルにある条件を課すことで波動作用素の存在を証明した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

1. Ito, Hiroshi T. and Yamada, Osanobu, Relativistic Hamiltonians with dilation analytic potentials diverging at infinity, Journal of the Mathematical Society of Japan, 68 (2011), no.4, 1-47. (査読あり)

2. Alexandrova, Ivana and Tamura, Hideo, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrodinger operators with potentials with supports at large separation, Ann. Henri Poincare, 12 (2011), no. 4, 679-721. (査読あり)

3. Alexandrova, Ivana and Tamura, Hideo, Resonance free regions in magnetic scattering by two solenoidal fields at large separation, Journal of Functional Analysis, 260 (2011), no.6, 1836-1885.

(査読あり)

3. Kadowaki, Mitsuteru and Nakazawa, Hideo and Watanabe Kazuo, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media, Electron. J. Diff. Equ., 2011 (2011), No.65, 1-18. (査読あり)

4. Ito, Hiroshi T. and Yamada, Osanobu, On the nonrelativistic limit of Dirac operators with potentials diverging at infinity, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B16 (2010), 75-89. (査読あり)

5. Mine, Takuya and Nomura Yuji, The spectrum of Schrodinger operators with periodic Aharonov-Bohm magnetic fields, RIMS Kokyuroku Bessatsu B16 (2010), 135-140. (査読あり)

6. Iwatsuka, Akira and Mine, Takuya and Shimada, Shin-ichi, Norm resolvent convergence to Schrodinger operators with infinitesimally thin toroidal magnetic fields, Spectral and scattering theory for quantum magnetic systems, Contemp. Math., 500 (2009), 139-151. (査読あり)

7. Winklmeier, Monika and Yamada, Osanobu, A spectral approach to the Dirac equation in the non-extreme Kerr-Newmann metric, J. Phys. A 42 (2009), no. 29, 295204, 15. (査読あり)

[学会発表] (計 20 件)

① 峯 拓矢, Explicit solutions for Schrodinger equations with Aharonov-Bohm magnetic fields, RIMS 研究集会「スペクトル散乱理論とその周辺」, 2011 年 12 月 16 日, 京都大学数理解析研究所

② 伊藤 宏, ディラック作用素のレゾナンスについて, 第 18 回超局所解析と古典解析, 2011 年 11 月 26 日, かんぼの宿伊野

③ 山田 修宣, Dirac 作用素の極限吸収原理について, 第 18 回超局所解析と古典解析, 2011 年 11 月 26 日, かんぼの宿伊野

④ 峯 拓矢, Bethe-Sommerfeld 予想について, 第 18 回超局所解析と古典解析, 2011 年 11 月 26 日, かんぼの宿伊野

⑤ 門脇 光輝, 3 次元半空間の波動伝播と定常位相の方法について, 2011 年夏の作用素論シンポジウム, 2011 年 9 月 4 日, 熊本市国際交流会館

⑥ 伊藤 宏, ディラック作用素のスペクトルについて, 2011 年夏の作用素論シンポジウム, 2011 年 9 月 3 日, 熊本市国際交流会館

⑦ 山田 修宣, The limiting absorption method for Dirac operators in the non-extreme Kerr-Newman metric, 2011 年夏の作用素論シンポジウム, 2011 年 9 月 3 日, 熊本市国際交流会館

⑧ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果 III, 2011 年夏の作用素論シンポジウム, 2011 年 9 月 3 日, 熊本市国際交流会館

⑨ 伊藤 宏, 遠方で発散するポテンシャルをもつ相対論的ハミルトニアンについて, 解析セミナー, 2011 年 6 月 17 日, 愛媛大学

⑩ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果 II, 作用素論セミナー, 2011 年 4 月 22 日, 京都大学数理解析研究所

⑪ 山田 修宣, Relativistic Hamiltonians with dilation analytic potentials diverging at infinity, 偏微分方程式姫路研究集会, 2011 年 2 月 19 日, イーグレ姫路

⑫ 峯 拓矢, The spectrum of the Aharonov-Bohm Hamiltonian on the hyperbolic plane, RIMS workshop "Spectral and scattering Theory and related topics", 2011 年 2 月 17 日, 京都大学数理解析研究所

⑬ 野村 祐司, 上半平面上の Aharonov-Bohm 磁場, 第 17 回超局所解析と古典解析, 2010 年 11 月 21 日, かんぼの宿山代

⑭ 山田 修宣, Dirac 作用素の極限吸収原理について, 第 17 回超局所解析と古典解析, 2010 年 11 月 20 日, かんぼの宿山代

⑮ 伊藤 宏, 遠方で非有界なポテンシャルをもつハミルトニアンについて, 第 17 回超局所解析と古典解析, 2010 年 11 月 20 日, かんぼの宿山代

⑯ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスとAB効果, 2011年夏の作用素論シンポジウム, 2010年9月4日, 松本市中央公民館Mウィング南

⑰ 野村 祐司, 上半平面上のAharonov-Bohm磁場と保型形式の零点, 作用素論セミナー, 2010年6月25日, 京都大学数理解析研究所

⑱ 野村 祐司, 周期的およびランダムなAharonov-Bohm磁場をもつSchrodinger作用素のスペクトル, 日本数学会年会函数解析学分会特別講演, 2010年3月24日, 慶応大学矢上キャンパス

⑲ 岩塚 明, 島田 伸一, 峯 拓矢, Spectral properties of Schrodinger operators with singular magnetic fields supported by circle in  $\mathbb{R}^3$ , RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2009年12月3日, 京都大学

⑳ 伊藤 宏, レゾナント評価と逆散乱問題, 2009年夏の作用素論シンポジウム, 2009年9月7日, いわて県民情報交流センターアイーナ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊藤 宏 (ITO HIROSHI)  
愛媛大学・理工学研究科・教授  
研究者番号: 90243005

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

山田 修宣 (YAMADA OSANOBU)  
立命館大学・理工学部・教授  
研究者番号: 70066744

田村 英男 (TAMURA HIDEO)  
岡山大学・理学部・教授  
研究者番号: 30022734

野村 祐司 (NOMURA YUJI)  
愛媛大学・理工学研究科・准教授  
研究者番号: 40282818

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)  
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・

准教授  
研究者番号: 90378597

岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)  
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授  
研究者番号: 40184890

門脇 光輝 (KADOWAKI MITSUTERU)  
愛媛大学・理工学研究科・准教授  
研究者番号: 70300548