

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 22 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540188

研究課題名（和文）非線形変分不等式の粘性解理論とその応用

研究課題名（英文）Theory of viscosity solutions for nonlinear variational inequalities and its applications

研究代表者

森本 宏明 (MORIMOTO HIROAKI)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：40085494

研究成果の概要（和文）：

確率微分方程式で記述される状態に対して効用関数を最大にする最適政策を決定する問題および非線形変分不等式に関する数理経済の問題を探索した。研究成果は次のように要約される：

(1) 著書の出版

この本の特徴は数理経済への幅広い応用のための数学的基礎を与えたところにある。

(2) ペナルティ法の開発

1次微分に拘束条件をもった非線形変分不等式の解法のためペナルティ方程式を開発した。

研究成果の概要（英文）：

The study explored the optimization problem to maximize the utility function for the state described by the stochastic differential equations and the problem of nonlinear variational inequalities on mathematical economics. The research results can be summarized as follows:

(1) Publication of a book

This book provides the mathematical foundation for broader applications to mathematical economics.

(2) Development of the penalty method

The penalty equations are developed to solve nonlinear variational inequalities with gradient constraint.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：変分不等式、粘性解、penalty法、幾何ブラウン運動、確率制御

1. 研究開始当初の背景

これまで線形変分不等式理論には長い研究の歴史があり、Bensoussan-Lionsの著書(1982)などの多くの本が出版されている。また、Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式については、フィールズ賞を受賞したP.L.Lionsの功績であるViscosity Solution (粘性解)の概念を用いる方法が広く知られている。粘性解は退化型HJB方程式を取り扱う際に都合が良い概念であることがFleming-Sonerの著書(1993)で議論されている。

最適性は、非線形のHJB方程式に確率微分方程式における伊藤の公式を適用して導かれる。このため、粘性解が古典解になっているかどうかを調べる問題は数理経済などの応用上からも重要となる。これについては下記の拙著(2010)で論及している。

研究対象である非線形変分不等式については、適当な関数を代入して解く方法以外になく、一般的な解法は未解決となっていた。

2. 研究の目的

これまでの成果を基礎にして、1次微分に拘束条件をもつ非線形変分不等式を解くための一般的な方法を開発することが望まれていた。

従って、研究の主眼は

「非有界領域上の非線形変分不等式および非線形線形微分方程式の解法」を究明することにある。

数学上の問題に留まらず、数理経済の複雑なシステムにおける最適政策を決定する問題などへの多くの応用が期待できる。

3. 研究の方法

1次微分に拘束条件をもつ非線形変分不等式を解くために、研究は次の2つの指針のもとで進められた。

(1) 問題に対応するペナルティ方程式を立てる。

ペナルティ方程式は、ペナルティ項にパラメーターと1次微分を含んでおり、ある種の確率制御に対応するHJB方程式と捉えることができる。このことから、確率的な解が構成可能となる。得られた解は凹性があり、既知の方法で、ペナルティ方程式の粘性解になっていることが分かる。粘性解理論より、その解は古典解になっていることが示される。

(2) ペナルティ方程式の解の極限として非線形変分不等式の解を求める。

有界領域において、凹性からペナルティ方程式の解の微分の有界性を導くことができる。これよりパラメーターをゼロにしたとき、この解が収束することが分かる。極限は、問題の変分不等式の粘性解になる。変分不等式の粘性解の概念は、この研究の中で導入されたものである。さらに、粘性解理論を発展させ、得られた解は滑らかであることが示される。

4. 研究成果

この間、長年の研究成果を下記の著書として出版することができた。この本の特徴は、これまで煩雑または不完全であったdynamic programming principleの証明のために確率微分方程式の弱解に関する山田—渡辺の定理を応用して簡潔で完全なものにしたこと、それによって数理経済への幅広い応用のための数学的基礎を与えたところにある。

これに基づいて、1次微分に拘束条件をもつ非線形変分不等式の解法のためにペナルティ方程式を開発した。粘性解の手法を発展させ、その極限として非線形変分不等式の解の存在と一意性を次の通り示した。

論文①： 企業では資本ストックの生産性を維持し、投資がなされる。生産を行い最大利潤をあげる最適政策を非線形変分不等式を解

いて決定した。

論文②： 保険料と債務の支払い関数を含んだ確率システムについて最適配当とリスク制御を論じている。

論文③： 幾何ブラウン運動の最適停止を伴う特異制御に関連する非線形変分不等式に対して、粘性解手法を用いて一意解の存在を示した。

論文④： 変分不等式の応用として Ramsey model に対する配当問題を粘性解手法を用いて解決し、最適配当を求めた。

論文⑤： 有限時間における経済成長の Ramsey model に対して、対応する HJB 方程式を解き、その解から最適消費量を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① K. Kawaguchi, H. Morimoto, An irreversible investment problem with maintenance expenditure, SIAM J. Control Optim. 印刷中

② H. Morimoto, Optimal dividend and risk control in diffusion models with linear costs, OR2011 Proceedings, 掲載予定

③ H. Morimoto, A singular control problem with discretionary stopping for geometric Brownian motions, SIAM J. Control Optim. 48, 2010, pp.3781-3804.

④ H. Morimoto, Optimal dividend payments in the stochastic Ramsey model, Stochastic Process. Appl. 120, 2010, pp.427-441.

⑤ T. Adachi, H. Morimoto, Optimal consumption of the finite time horizon Ramsey problem, J. Math. Anal. Appl. 358, 2009, pp. 28-46.

[学会発表] (計 6 件)

① Variational inequalities in the optimal dividend and risk control problem, 環瀬戸内ワークショップ, 愛媛大学, 2012 年 2 月

② Optimal dividend and risk control in diffusion models with linear costs, OR2011 Zurich, University of Zurich, 2011 年 8 月

③ Parabolic variational inequalities for optimal dividends in the logistic model, 松山解析セミナー, 愛媛大学, 2011 年 2 月

④ On the penalty method in an irreversible investment problem, 微分方程式深江ワークショップ, 神戸大学, 2010 年 1 月

⑤ 幾何ブラウン運動に対する singular control と optimal stopping, 確率論シンポジウム, 愛媛大学, 2009 年 12 月

⑥ Variational inequalities with gradient constraint and applications to optimal dividend payments, 微分方程式の粘性解とその周辺, 京都大学数理研, 2009 年 6 月

[図書] (計 1 件)

① H. Morimoto, Stochastic Control and Mathematical Modeling: Applications in Economics, Cambridge University Press, 2010, 325

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森本 宏明 (MORIMOTO HIROAKI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：40085494

(2) 研究分担者

川口 和仁 (KAWAGUCHI KAZUHITO)
愛媛大学・法文学部・准教授
研究者番号：30234040

石川 保志 (ISHIKAWA YASUSHI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70202976

(3) 連携研究者
該当無し