様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：17401
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009 ～ 2011
課題番号：21540190
研究課題名（和文）複数の場の相互作用を記述する非線形偏微分方程式の数学解析
研究課題名（英文）Mathematical analysis of nonlinear partial differential equations describing interaction of several fields

研究代表者
和田　健志　（WADA TAKESHI）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70294139

研究成果の概要（和文）：数理物理に現れる非線形偏微分方程式およびそれらの連立系に対し，初期値問題が適切になるかどうかを研究した．方程式に初期条件や境界条件を課したときに，解が唯一つ存在し,与えられたデータに連続的に依存するとき,その問題は適切であるという．適切性を示すことは，方程式が現象を正しく記述していることを保証するために大切なステップである．本研究においては，非線形シュレディンガー方程式および，それを含む連立系であるマクスウェル・シュレディンガー方程式の適切性を自然な条件の下で証明した．

研究成果の概要（英文）：We studied the well-posedness of nonlinear partial differential equations in mathematical physics and their systems. A given problem for a partial differential equation with initial or boundary conditions is called well-posed if the problem has a unique solution, and if the solution depends continuously on the data given in the problem. This is an important step to ensure that the equation correctly describes the phenomenon. In this research we proved the well-posedness of nonlinear Schrödinger equations and the Maxwell-Schrödinger system under appropriate conditions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：非線形偏微分方程式・適切性・相互作用

１．研究開始当初の背景

数理物理に現れる非線形偏微分方程式，なかでも非線形波動方程式・分散型方程式の研究はここ 30 年ほどの間に大きく進展してきた．特に最近十数年の間は Bourgain，Kenig-Ponce-Vega，Tao などに代表される調和解析を駆使した方法により，適切性に関する理論が大きく進歩した．また，解の漸近挙動についても，物理的に重要な例が多い長距離型散乱や大きなデータに対する散乱理論

などの場合を含め，数多くの事柄が明らかにされてきた．これらの先行研究により，典型的な非線形波動方程式・分散型方程式の性質についてはかなりのことが判明しつつあった．これら先行する研究においては，林，堤，小澤，小川，中西，高岡氏など日本人による貢献も大きかった．

しかしながら，現実の自然現象は複雑であり，多くの場合，異なった性質を持つ複数の場がお互いに影響を与えあっている．この場合，現象を記述する方程式は異なる型の方程式の連立系となり，その解析には巧妙なアイデアと複雑な計算を必要とするため未解決の問題も多かった．

２．研究の目的

複数の場の相互作用を記述する方程式としては，例えば，電磁場と荷電粒子との相互作用を表す Maxwell-Klein-Gordon 方程式，Maxwell-Schrödinger 方程式，Maxwell-Dirac 方程式等がよく知られている．他にも Dirac-Klein-Gordon 方程式や Zakhalov 方程式，Wave-Schrödinger 方程式，Klein-Gordon-Schrödinger 方程式等々数多くの方程式が様々な現象を記述するために提唱されており，それらの方程式を数学的に解析することは物理との関連はもちろん純粋数学の問題としても興味深い．本研究の目的は，これらの連立系に対して，適切性や解の挙動などの数学的性質を明らかにすることであった．

また，主要な非線形波動方程式・分散型方程式の適切性理論は研究開始時までにかなりの部分が確立されたと考えられていた．しかしながら，先行研究を丹念に調べてみると，応用するうえで不自然であったり，強すぎたりする条件が仮定されている場合もあった．従って，連立系への応用も視野に入れて，より使いやすい理論を構築することも目的となっていた．

３．研究の方法

上述した様々な方程式の中から，主として Maxwell-Schrödinger 方程式を採りあげ，その適切性を研究した．併せて，典型的な冪乗型の非線形 Schrödinger 方程式の適切性理論についても再検討し，既存の研究で仮定されていた不自然な条件を外すことを考えた．

これらの解析を実行するためには，関数空間における種々の線形写像・多重線形写像の評価式を必要とする．そのために，方程式の代数的・幾何学的性質を十分に考慮した計算法や，補間空間論を含めた関数解析・調和解析の様々な技法を用いた．

４．研究成果

（１）Maxwell-Schrödinger 方程式

この方程式は荷電粒子の運動とそれによって生成される電磁場の相互作用を記述する方程式であり，電磁ポテンシャルを含む Schrödinger 方程式と，電磁ポテンシャルを用いて記述された Maxwell 方程式とからなる．適当なゲージのもとで Maxwell 方程式は連立の非斉次波動方程式，または Poisson 方程式と非斉次波動方程式の連立系となる．解を考える上でもっとも自然な関数空間はエネルギー空間 H^1 である．

空間３次元の場合には，研究代表者と分担者との共同研究（Comm. Math. Phys. 276, p. 315）により時間大域的適切性が証明されていた．この際，解析を容易にするため，方程式を最初に Coulomb ゲージのもとで考え，適切性を証明した後に，ゲージ変換を行うことにより Lorentz ゲージなど他のゲージ条件のもとでの解を考察していた．しかし，空間 2 時限の場合は Coulomb ゲージのもとではスカラーポテンシャルが通常の Lebesgue 空間に属さないため解析が困難であり，Lorentz ゲージのもとで直接方程式を解析する必要があった．そのため，上述の結果における我々の手法はそのままでは適用できなかった．Lorentz ゲージを直接取り扱うためには，共変微分による計算を組織的に用いる必要があった．

この方程式を解析する上で最大の困難は滑らかさの低いポテンシャルに対して Schrödinger 方程式の解を構成する部分である．そのためには Schrödinger 方程式の平滑化効果を巧みに利用する必要があった．平滑化効果は多くの数学者により研究されているが，既存の結果はポテンシャルに対してかなり強い条件を課しており，我々の考える問題には適用できない．そこで我々の目的に合うように，ポテンシャルに対する十分弱い仮定の下で時間局所的平滑化効果を証明し，それを Maxwell- Schrödinger 方程式に応用するという方針で臨んだ．そのため，平滑化作用素を通常用いられるものから磁場つきハミルトニアンとの親和度が高いものに置き換え，共変微分を用いた評価を行った．その結果，ポテンシャルが波動方程式の解であり，有限伝播性を持つならば，滑らかさが低くても平滑化評価が得られることが分かった． この評価を用いることにより，空間２次元における Maxwell-Schrödinger 方程式はエネルギー空間において時間大域的に適切であることが証明できた．

ここで得られた平滑化評価はそれ自体興味深いものであり，高次元への一般化や他の非線形問題への応用も期待される．

（２）冪乗型非線形 Schrödinger 方程式

冪乗型の非線形Schrödinger 方程式は，レーザーの理論や非線形変調など，数理物理の様々な分野に現れる基礎方程式のひとつである．この方程式の適切性理論に関しては，1970年代後半の Ginibre-Velo，Lin-Strauss，Baillon-Cazenave-Figueira などの研究をはじめとして数多くの研究がなされており，ほぼ完成に至ったと考えられていた．しかしながら，先行研究を丹念に眺めてみると，以下の観点から不十分であることに気づく．

①非線形 Schrödinger 方程式のうちで応用上最も大切なのはゲージ不変な３次の非線形項をもつ場合である．また，方程式を取り扱ううえで通常用いられる関数空間は Sobolev 空間 H^s であるが，そのうちで特に重要なのは方程式の不変量と関連した $s=0$（Lebesgue 空間 L^2）および $s=1$ の場合である．前者は電荷保存則に，後者はエネルギー保存則に関連した空間である．

しかしながら，方程式のもつ数学的な構造を最大限あきらかにするためには，非線形項としては一般の p 次の冪を考え，分数次の場合まで含めた一般の Sobolev 空間 H^s において方程式の適切性を考察した方がよい．即ち，この様に状況を一般化したうえで p が s にどの様に依存するかを調べるのである．その際，p が自然数でかつ奇数の場合を除き，非線形項は高々 p 回しか微分できないため，許される p の下限は s の単調増加関数となる．これは，非線形項が十分滑らかでないために，解の滑らかさが初期条件のそれと比べて低くなる可能性があることを意味する．そして，既知の結果においては，p の下限の評価が最適とは思えない不自然なものであった．

②研究結果の概要でも記したように，適切性とは方程式の解が一意に存在し，解が初期条件に対して連続に依存することを意味する．しかしながら，解の存在と一意性はともかく，初期条件に対する連続依存性については十分に考察されてこなかった．これは解の存在・一意性がより注目されやすい問題であることに加え，①で述べたように非線形項の微分可能性に制限がついていることによる技術的困難のためでもあった．しかしながら，連続依存性は決しておろそかにしてはならない問題である．なぜなら，現実の問題では観測データは常に誤差を含むので，データの微小な変動に対して解の変化が微小でなければ方程式による現象の解析が困難となるからである．

先行結果に対するこれらの欠点に注目した我々は，より自然な条件のもとで非線形 Schrödinger 方程式の適切性理論を構築することを目的として研究を行った．その際に鍵となったのは，時間変数に関する分数回微分を含む Strichartz 型評価の利用であった．

Schrödinger 方程式は空間変数に関しては２階，時間変数に関しては１階の方程式であるから，空間変数に関する微分を時間変数に関する微分に置き換えることにより非線形項を微分する回数を減らすことができる．この様な発想は 1980 年代の堤誉志雄氏の研究にその萌芽が見られるが，分数次の Sobolev 空間において同様の解析を行うには時間変数に関する分数回微分を含む Strichartz 型評価が必要となる．この評価は初め Pecher により示されたが，証明には不備な点があり，また Lebesgue 指数に関する条件が複雑で使いやすいとはいいにくいものであった．我々はこの評価をより使いやすい形に改善するとともに完全な証明を与えて②の問題への適用を可能した．この評価を組織的に求めることにより，p の下限に関してほぼ最良と考えられる条件のもとで適切性を証明することが可能になった．このような手法は他の分散型方程式にも適用可能と考えられ，非線形方程式の適切性に関する理解が一層すすむことが期待される．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① H. Uchizono and <u>T. Wada</u>, Continuous dependence for nonlinear Schrödinger equation in H^s, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 査読有り，(2012) 印刷中．

② H. Uchizono and <u>T. Wada</u>, On well-posedness for nonlinear Schrödinger equations with power nonlinearity in fractional order Sobolev spaces, J. Math. Anal. Appl.，査読有り，(2012) 印刷中．

③ <u>T. Wada</u>, Smoothing effects for Schrödinger equations with electro-magnetic potentials and applications to the Maxwell-Schrödinger equations, J. Funct. Anal.，査読有り，263 (2012)，1-24.

④ <u>M. Nakamura</u>, Global solutions for nonlinear wave equations with localized dissipations in exterior domains, J. Differential Equations, 査読有り，252 (2012)，4742-4785.

⑤ <u>M. Nakamura</u> and K. Tsutaya, Scattering theory for the Dirac Equation of Hartree type and the semirelativistic Hartree equation, Nonlinear Anal. Series A: Theory, Methods and

Applications, 査読有り, 75 (2012), 3531-3542.

⑥ M. Nakamura, Small global solutions for nonlinear complex Ginzburg-Landau equations and nonlinear dissipative wave equations in Sobolev spaces. Rev. Math. Phys., 査読有り, 23 (2011), 903-931.

⑦ M. Nakamura, Remarks on Keel-Smith-Sogge estimates and some applications to nonlinear higher-order wave equations. Differential Integral Equations, 査読有り, 24 (2011), 519-540.

〔学会発表〕(計4件)

① 内園晴典, 和田健志. 非線形 Schrödinger 方程式の解の初期条件に関する連続依存性について, 第125回日本数学会九州支部例会(2011年10月22日) 熊本大学.

② T. Wada, Smoothing effects for Schrödinger equations with electro-magnetic potentials and applications to the Maxwell-Schrödinger Equations, 第7回非線型の諸問題 (2011年9月25日) 熊本大学.

③ 和田健志, 電磁ポテンシャルを含む Schrödinger 方程式の平滑化効果と Maxwell- Schrödinger 方程式への応用, 夏の偏微分方程式セミナー (2010年8月25日) 神戸大学瀧川記念会館.

④ 和田健志, 空間2次元における Maxwell-Schrödinger 方程式, 夏の偏微分方程式セミナー (2009年8月28日) 龍谷大学セミナーハウスともいき荘 (京都).

６. 研究組織

(1)研究代表者

和田　健志 (WADA TAKESHI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70294139

(2)研究分担者

中村　誠 (NAKAMURA MAKOTO)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70312634