

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 4月 26日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2012

課題番号：21540192

研究課題名(和文) Weil-Petersson計量とTakhtajan-Zograf計量の応用

研究課題名(英文) Applications of the Weil-Petersson and the Takhtajan-Zograf metrics

研究代表者

小櫃 邦夫(OBITSU KUNIO)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：00325763

研究成果の概要(和文)：

W.-K. To氏とL. Weng氏の共同研究で本質的な進展があった。2008年に出版された彼らと共著の論文において、Takhtajan-Zograf計量のモジュライ空間の境界近傍における漸近挙動の評価を初めて与えた。類似の計量であるWeil-Petersson計量の漸近挙動と比較した時、Takhtajan-Zograf計量の方が真に小さいオーダーで振る舞うことを突き止めた。しかし、漸近挙動の評価を与えただけで、真のオーダー評価はいまだ未解決の問題として残されていた。今回は現在のところ上からの評価のみではあるが、Takhtajan-Zograf計量の漸近挙動の最良と思われる評価に改良することが出来た。

研究成果の概要(英文)：

The research with W.-K. To and L. Weng has been advanced. In the paper with them published in 2008, We gave some estimates for the asymptotic behaviors of the Takhtajan-Zograf metric. When we compare the Takhtajan-Zograf metric with the Weil-Petersson metric, we found that the order of the asymptotic behavior of the Takhtajan-Zograf metric is strictly smaller than the one of the Weil-Petersson metric. But the precise order of the asymptotics of the Takhtajan-Zograf metric are still unknown. Recently with W.-K. To and L. Weng, I succeeded in improving the upper bound estimate of the Takhtajan-Zograf metric which we could believe is the best upper estimate.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ケーラー計量、モジュライ空間、リーマン面、漸近解析

1. 研究開始当初の背景

2008年のWolpert氏との共著論文において証明した公式は、近年モジュライ空間の交点数に関する著しい結果を得た Mirzakhani が用いた公式と本質的に一致している。ただし、Mirzakhaniはsymplectic幾何学でよく知られたDuistermaat-Heckmanの定理を用いてWitten類という特性類が第2項に現れることを証明しているが、代表者とWolpertはそれとは独立により一般的に複素解析的構造の退化の枠組みの中で証明を与えたものであった。一方、Weng氏は一部藤木氏と協力し、点付きリーマン面のモジュライ上の行列直線束に対してArakerov幾何的解釈を与え、特に、Takhtajan-Zograf計量もまたHodge計量であることを示した。また、Hain氏、Cornalba-Harris氏、Weng氏は、よく知られた行列直線束と高次微分層から導かれる別の直線束の間のMumford関係式を点付きリーマン面の場合に拡張しているが、一部Weil-Petersson計量とTakhtajan-Zograf計量の比較について未解明な部分があるために不十分な結果であった。そこで、両計量の比較を完全に決定することが大きな研究目標となった。代表者はTo氏とWeng氏の論文 (Commun. Math. Phys. (2008)) において、境界近傍の特別な方向について、両計量の比較の問題を解決した。この論文でTakhtajan-Zograf計量の境界における漸近挙動の評価を与えたが、上からの評価と下からの評価のオーダーがずれており、正確なオーダーを求めることが課題として残されていた。

2. 研究の目的

1. で述べた公式は、Weil-Petersson形式とTakhtajan-Zograf形式がそれぞれ対応する直線束のモジュライ空間の境界における位相幾

何学的寄与を詳しく記述するものと考えられ、Wolpert氏、Weng氏らとともにその幾何学的解釈を与えることが、目的である。

一方で、申請者はTakhtajan-Zografケーラー形式の実解析的な座標による大域表示があるのではないかと考えている。例えばWeil-Peterssonケーラー形式は、Fenchel-Nielsen座標による大域表示をもつことが、Wolpertにより示されている（これは、点付きリーマン面の場合でも正しい）。代表者は、Pennerによる点付きリーマン面のモジュライ空間上の座標が点の性質を良く反映しているものであることを明らかにしている。この着想を発展させてPennerの座標によるTakhtajan-Zograf計量の表示を求めたい、と考えている（Weil-Petersson形式がPennerの座標による大域表示をもつことは、Penner自身が示している）。

2007年9月、Takhtajan氏、Zograf氏と札幌で会い彼らと議論した結果、リーマン面上の有理型函数のなすモジュライ空間であるHurwitz空間に関心を持ち始めている。Hurwitz空間はリーマン面のモジュライ空間のコホモロジー群の生成元を見つける上で重要な道具となっており、Hurwitz空間上におけるWeil-Petersson幾何学を建設することを研究目的のひとつに挙げたい。

近年、Todorovはプレプリント (Witten's Geometric Quantization of the Moduli of CY Threefolds, math. AG/0004043) において、Calabi-Yau 3-軌道体のTeichmüller空間を構成することに成功し、それが多様体になることなどを示している。その方法は、Weil-Petersson計量を導入し倉西族の存在を証明することなどによる。古典的なリーマン面のTeichmüller空間の研究に加えて、鹿児島大学の宮嶋氏、坪井氏、愛甲氏や東北大学の山田氏とともに高次元複素軌道体の

Weil-Petersson幾何学の建設も目指していきたい, と考えた.

3. 研究の方法

点付きリーマン面のモジュライ空間の Takhtajan-Zograf 計量の漸近挙動評価をより精密化することでも2. で述べた目的を達成できると考えた.

(計画1)として, 点付きリーマン面のモジュライ空間の Takhtajan-Zograf 計量に関する L2-コホモロジー群を決定することを挙げる. 種数が2以上の場合, Takhtajan-Zograf 計量の L2-コホモロジーは Weil-Petersson 計量の L2-コホモロジーより真に大きい, これはモジュライ空間の境界成分の一部で Takhtajan-Zograf 計量が退化してしまう現象から起こることである. この退化のオーダーを完全に決定できれば Takhtajan-Zograf 計量の L2-コホモロジーは求まるが, そのためには最近申請者が得た退化 Eisenstein 級数のオーダー評価を応用すればよいと考えている.

(計画2)として, 点付きリーマン面のモジュライ空間の境界における Weil-Petersson 計量の漸近展開公式をさらに精密化することを挙げる. 代表者は Wolpert と共同で, 退化 Eisenstein 級数の挙動評価の精密化を進めている. 代表者は「漸近展開は実はピンチングされる測地線の長さに関する多項式になる」という予想に確信を持っている.

(計画3) 2006年11月に韓国高等研究所 (KIAS) の J. Park 氏から招聘され, リーマン面のモジュライ空間の行列式直線束の Quillen 計量の境界挙動を直接計算する問題を検討した. 最近ドイツの研究者 M. Schulze 氏が与えた結果を応用することで解決したいと考えている. ソウルの J. Park 氏を訪ねて議論した.

(計画4) 2007年2月に東北大学の山田澄生氏と会い, Wolpert 氏による Teichmüller 空間の Weil-Petersson 完備化空間の性質を明らかにした論文「Geometry of Weil-Petersson completion of Teichmüller space」を勉強した. 予想を解決した論文であり, 山田氏と協力して解読したことは大変有意義であった.

(計画5) 「Takhtajan-Zograf 計量の曲率が負であるか」という問題は, 長年手つかずのままの課題である. これも種数1, 点の数1の場合から調べて解決への糸口をつかもうとした.

(計画6) 近年, Calabi-Yau 多様体など高次元多様体のモジュライ空間の Weil-Petersson 幾何の研究が進んできている. 高次元代数多様体のモジュライ空間の研究などを専門にしている, 鹿児島大学の宮嶋氏 (研究分担者), また高次元の微分幾何学が専門の鹿児島大学の愛甲氏 (研究分担者) と, 協力してこの分野の最新の結果を理解し検討し, 代表者の得意とする関数解析的アプローチを用いて研究を試みた.

4. 研究成果

To 氏と Weng 氏と議論の結果, 2008 年論文の Takhtajan-Zograf 計量の漸近挙動公式の上からの評価において, ϵ を取り除くことに成功し, 最良と予想される評価を導いた. そこで用いた手法は, Eisenstein 級数が満たす微分方程式と Eisenstein 級数をモデル化した関数が満たす微分方程式を以前より詳しく解析することを試みるものであり, その結果として Eisenstein 級数と Eisenstein 級数をモデル化した関数のより精密な比較を導くことに成功した. 証明の鍵となるのは, Eisenstein 級数と Eisenstein 級数をモデル化した関数の商関数が満たす微分方程式を導

出し、その解に対する最大値の原理が成立することを観察することであった。この結果については論文執筆中である。また、同結果はドイツのOberwolfach研究所で行われた集会や京都大学数理解析研究所で行われた集会で代表者が英語で発表した。いくつかの質問も受け、海外の学者からも関心をもたれたと思っている。しかし、下からの評価についてはまだ以前の評価を最良と予想される評価に改良することは出来ておらず、現在もTo氏とWeng氏と検討を続けている状態である。かなり問題の本質部分を見極めている段階に到達している、と考えていて近い将来の進展を期待している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

① 小櫃 邦夫, Recent progress on Takhtajan-Zograf and Weil-Petersson metrics, 京都大学数理解析研究所講究録, (2013) (掲載決定) 査読無.

② 小櫃 邦夫, 書評: S. A. Wolpert: Families of Riemann Surfaces and Weil-Petersson Geometry, 数学, Vol.64, No. 2, pp. 209-213 (2012) 査読有.

③ 小櫃 邦夫, Weil-Petersson 幾何の問題, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1731, pp. 40-51 (2011) 査読無
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/170580/1/1731-04.pdf>.

④ K. Obitsu, Some topics on the Takhtajan-Zograf metric, Oberwolfach Reports, Vol.7, pp.3128-3130 (2010) 査読無.

⑤ K. Obitsu, Asymptotics of degenerating Eisenstein series, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, Vol.B17, pp.115-126 (2010) 査読有.

[学会発表] (計7件)

① K. Obitsu, Recent progress on Takhtajan-Zograf and Weil-Petersson metrics, Geometry of Moduli space of low dimensional manifolds, 2012年10月30日

(京都大学数理解析研究所).

② 小櫃 邦夫, Takhtajan-Zograf 計量の最近の話題, リーマン面に関連する位相幾何学, 2011年9月6日 (東京大学大学院数理学研究科).

③ K. Obitsu, Some topics on the Takhtajan-Zograf metric, Teichmüller Theory, 2010年12月2日 (Oberwolfach 数理解析研究所 (ドイツ)).

④ 小櫃 邦夫, Recent topics in the metric geometry of the moduli space, 九州大学 幾何学セミナー, 2010年10月8日 (九州大学大学院数理学研究院).

⑤ 小櫃 邦夫, Weil-Petersson 幾何の問題, 複素幾何学に関する諸問題, 2010年9月7日 (京都大学数理解析研究所).

⑥ K. Obitsu, Recent developments in the Takhtajan-Zograf metric I, II, Lectures on Spectral Invariants and Moduli Spaces, 2010年6月21日 (KIAS (韓国高等研究所)).

⑦ K. Obitsu, Asymptotic behaviors of metrics on the moduli space of curves, 多変数関数論葉山シンポジウム, 2009年7月 (湘南国際村 (神奈川県)).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小櫃 邦夫 (OBITSU KUNIO)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 00325763

(2) 研究分担者

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA KIMIO)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 40107850

愛甲 正 (AIKOU TADASHI)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 00192831