

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 5 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540199

研究課題名（和文） 特異積分と関数空間の研究（偏微分方程式を視野に入れて）

研究課題名（英文） Study of singular integrals and function spaces

研究代表者

古谷 康雄（FURUYA YASUO）

東海大学・沼津教養教育センター・教授

研究者番号：70234903

研究成果の概要（和文）：特異積分作用素を中心として、応用上重要な積分作用素の性質を調べた。特に Hardy 空間、Morrey 空間、Herz 空間上の有界性を調べた。多重線形特異積分作用素とその重みつき評価についても研究した。

研究成果の概要（英文）：We study boundedness of generalized singular integral operators on several function spaces, in particular, on Hardy space, Morrey space and Herz space. We also study multilinear singular integrals and weighted estimates.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：特異積分、ハーディー空間、Morrey 空間、Herz 空間

1. 研究開始当初の背景

前年度までに一般化された特異積分の例としてのカルデロンの変換子作用素、コーシー積分作用素のハーディー空間上での有界性を示せていたので、次は擬微分作用素に関する評価を得たいと思っていた。

Fractional integral の L^p 有界性に関する Hardy-Littlewood-Sobolev の定理を精密化のために Morrey 空間、Herz 空間が有効であろうということが今までの研究から予想されたので、これらの空間上での有界性を示そうと思った。

2. 研究の目的

擬微分作用素は一般化された特異積分の範疇に入るのであるが、シンボルの評価が必

要なので、今までの結果をそのまま当てはめることはできない。そこを変換子の平滑化効果を使って評価をする。

Fractional integral には臨界指数があり、それを境に状況が変わる。その部分を精密に評価する。合わせて重みつき評価も考える。

3. 研究の方法

代表者、研究分担者それぞれが個別のテーマで研究を進めるとともに、お互いに密接に連携を取り合い研究を進めた。科研費の補助により行った研究集会は以下である。

2009 年 11 月、実解析学シンポジウム（城西大学）

2009 年 12 月、調和解析セミナー（岡山大学）

2010年3月、発展方程式シンポジウム（東海大学）

2010年11月、実解析学シンポジウム（九州工業大学）

2010年12月、調和解析セミナー（日本大学）

2011年11月、実解析学シンポジウム（弘前大学）

2011年12月、調和解析セミナー（大阪大学）

2012年3月、発展方程式シンポジウム（東海大学）

4. 研究成果

一般化された特異積分作用素

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y) dy$$

の積分核 K に弱い条件を仮定したとき T がハーディー空間 H^p から局所ハーディー空間 h^p への有界作用素であることはこれまで得られていた結果である。

擬微分作用素 $p(x, D)$ と掛算作用素 b との交換子

$$[b, p]f(x) = b(x) \cdot p(x, D)f(x) - p(x, D)(bf)(x)$$

も形式的には $Tf(x) = \int K(x, y)f(y)dy$ の形に書けるが、この表現では K は上の条件を満たさない。そこで Coifman-Meyer がこの作用素の L^p 有界性を示した方法と、上で得た結果を組み合わせ、特に平滑化効果を使い、弱い条件の下で $[b, p]$ が局所ハーディー空間 $h^p(\mathbb{R}^n)$ 上の有界作用素であることを証明した。 $H^p \rightarrow h^p$ 有界でなく $h^p \rightarrow h^p$ 有界が示せたことが重要である。

Fractional integral operator

$$I_{-\alpha} f(x) = \int f(y)/|x-y|^{n-\alpha} dy$$

は $1 < p < n/\alpha$ のときは $L^p \rightarrow L^q$ 有界になるが (Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式)、 $p = n/\alpha$ (臨界指数) のときは $L^p \rightarrow BMO$ になることはよく知られている。

この結果を Herz 空間 $K^{p, q}_{\alpha}$ の枠組みで考え、既知の結果を以下のように改良した。

$I_{-\alpha}$ は $K^{p, 0}_{n/\alpha} \rightarrow BMO$ 有界である。 $L^{n/\alpha}$ より $K^{p, 0}_{n/\alpha}$ の方が広い空間なので改良したことになる。

Spanne は Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を Morrey 空間 $L^{p, \lambda}$ の枠組みで精密化し、Adams はその結果を改良した。

Komori-Shirai は Spanne の結果を重みつき Morrey 空間で考えた。我々は Adams の結果の重みつき評価を得た。さらに臨界指数の場合の重みつき評価も証明した。

これらの結果を多重線形作用に拡張することが現在進行中の研究で、一部はすでに投稿中である。

Herz 空間と Morrey 空間を統一的に扱うことができる $B\sigma$ 空間というものを導入し、その上での作用素の性質を調べることも現在進行中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計14件)

- ① T. Iida, Yasuo Komori-Furuya and E. Sato, The Adams inequality on weighted Morrey spaces, Tokoyo J. Math. vol. 34, 535-545 (2011) 査読あり
- ② Yasuo Komori-Furuya, A note on Muckenhoupt type weight classes on nondoubling measure spaces, Georgian Math. J. vol. 18, 131-135 (2011) 査読あり
- ③ Yasuo Komori-Furuya, Fractional integral operators on Herz spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu vol. 26, 15-22 (2011) 査読あり
- ④ Yasuo Komori-Furuya, Two remarks on commutators of Hardy operators, Australian J. of Math. Anal. and Appl. vol. 7, 1--5 (2011) 査読あり
- ⑤ Yasuo Komori-Furuya, Fractional integral operators on Herz spaces for supercritical indices, J. Funct. Spaces and Appl. vol.9, 179--190 (2011) 査読あり
- ⑥ Yasuo Komori-Furuya, Commutators of pseudo-differential operators on local Hardy spaces, Acta Sci. Math. (Szeged). vol. 77, 489--501 (2011) 査読あり
- ⑦ Tokio Matsuyama, Global well-posedness for the exterior initial-boundary value problem to the Kirchhoff equation, J. Math. Soc. Japan, vol. 62, 1167-1204 (2010) 査読あり
- ⑧ Yasuo Komori and Katsuo Matsuoka, Strong and weak estimates for fractional integral operators on some Herz-type function spaces, Rendiconti del Circolo Math. di Palermo vol.82 375-385 (2010) 査読あり
- ⑨ Yasuo Komori-Furuya and K. Matsuoka, Weighted estimates for singular integral operators on CMO spaces, Sci. Math. Japonicae, vol. 72, 219-226 (2010) 査読あり
- ⑩ T. Iida, Yasuo Komori-Furuya and E. Sato, A note on multilinear fractional integrals, Analysis in Theory and Applications, Vol. 26, 301-307 (2010) 査読あり
- ⑪ Tokio Matsuyama and M. Ruzhansky, Asymptotic integration and dispersion for hyperbolic equations, Advanced in

- Differential Equations, vol. 15, 721-756 (2010), 査読あり
- ⑫ Tokio Matsuyama and M. Ruzhansky, Time decay for hyperbolic equations with homogeneous symbols, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. I, Vol. 347, 915-919 (2009) 査読あり
- ⑬ Yasuo Komori, Boundedness of several operators on weighted Herz spaces, J. Funct. Sp. and Appl., vol.7, 1-12 (2009) 査読あり
- ⑭ 小森康雄, Nondoubling measure と調和解析, 数学 61 卷, 376-394 (2009) 査読あり

[学会発表] (計 15 件)

- ① 古谷康雄, 松岡勝男, 中井英一, 澤野嘉宏, Integral operators on B_{σ} Morrey-Campanato spaces, 日本数学会年会 2012/3/29/ 東京理科大学
- ② 松山登喜夫, Global solutions to Kirchhoff systems, 発展方程式シンポジウム, 2012/3/8, 東海大学
- ③ 古谷康雄, Maximal function の弱 L^p 有界性, 調和解析セミナー, 2011/12/16, 大阪大学
- ④ Tokio Matsuyama, Asymptotic properties for hyperbolic systems with time-dependent coefficients, 8th International ISAAC Congress, Moscow, 2012/8/25. People's Friendship University of Russia
- ⑤ 松山登喜夫, Global solutions to Kirchhoff systems, 早稲田大学応用解析研究会, 2012/11/19, 早稲田大学
- ⑥ Tokio Matsuyama, Dispersion for 3D wave equation with a potential in exterior domains, Asymptotic Properties of Solutions to Hyperbolic Equations, 2011/3/23, Imperial College London
- ⑦ 松山登喜夫, Dispersion for 3D wave equation with a potential in an exterior domain, 微分方程式の総合的研究, 2010/12/18, 京都大学
- ⑧ 飯田毅士, 古谷康雄, 佐藤圓治, New multiple weights and the Adams inequality on weighted Morrey spaces 調和解析セミナー, 2010/12/26, 日本大学
- ⑨ 飯田毅士, 古谷康雄, 佐藤圓治, The Adams inequality on weighted Morrey spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2010/9/26, 名古屋大学
- ⑩ 檜崎隆, Cauchy problem for the system for damped wave equations with slowly decaying data, 発展方程式シンポジウム, 2010/3/12, 東海大学
- ⑪ Tokio Matsuyama, Kirchhoff equation in

- an exterior domain, GF2009, 2009/9/3, Wien University
- ⑫ Tokio Matsuyama, Strichartz estimates for wave equation with a potential in an exterior domain, ISAAC Congress 2009, 2009/6/17, Imperial College London
- ⑬ 古谷康雄, 多重線形特異積分入門, 調和解析セミナー, 2009/12/25, 岡山大学
- ⑭ 古谷康雄, Pseudo-differential operators on Hardy spaces, 偏微分方程式の諸問題, 2009/10/23, 東海大学
- ⑮ 古谷康雄, nondoubling 測度空間上の weight に関する注意, 日本数学会秋季総合分科会, 2009/9/25, 大阪大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古谷 康雄 (FURUYA YASUO)
東海大学・沼津教養教育センター・教授
研究者番号：70234903

(2) 研究分担者

檜崎 隆 (NARASAKI TAKASHI)
東海大学・理学部・教授
研究者番号：70119692

松山 登喜夫 (MATSUYAMA TOKIO)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：70249712