

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月27日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540202

研究課題名（和文） 実解析学の手法による非有界領域上の Navier-Stokes 方程式の研究

研究課題名（英文） Study on the Navier-Stokes equations on unbounded domains by way of real analysis

研究代表者

山崎 昌男（YAMAZAKI MASAO）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20174659

研究成果の概要（和文）：2次元全空間および外部領域上の Navier-Stokes 方程式について研究を行った。対称性の強い小さな定常外力が存在する場合、遠方での減衰が非常に速い小さな定常解が一意的に存在することが示された。またその定常解が十分小さい場合には、初期摂動についての大きさの限界なしで定常解が安定であることが示された。また平行平板間の Navier-Stokes 方程式についての研究も行った。この問題を Besov 空間で考察した結果、 $p$  が無限大の場合は外力なしの場合にも自明でない解があり、これが Poiseuille 流に相当することがわかった。

研究成果の概要（英文）：This research is concerned with the Navier-Stokes equations on either the whole plane or two-dimensional exterior domains. It was shown that, if there exists a small stationary external force with strong symmetry, the equation has a small stationary solution decaying rapidly at infinity. It was also shown that, if the stationary solution above is sufficiently small, it is stable under initial perturbation without restriction on the size. The Navier-Stokes equations in an infinite layer is also studied. It is shown that, if the equation is treated in the Besov spaces, nontrivial solutions with no external forces exist if  $p$  is infinite, and that these solutions correspond to the Poiseuille flows.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式，偏微分方程式論

## 1. 研究開始当初の背景

定常外力がある場合の外部領域上の Navier-Stokes 方程式の定常解の存在，一意性および安定性については，空間3次元以上の場合には弱  $L^n$ -空間を用いることによってほ

ぼ満足すべき結果が得られていたが，2次元の場合は十分な結果が得られていなかった。特に2次元の場合はある種の対称性が必要であることが知られていた。

また平行平板間の Navier-Stokes 方程式

については、1 より大きい有限の  $p$  について  $L_p$  空間で考察され、問題が適切であることが知られていたが、この結果と Poiseuille 流, Couette 流といった、既知の特解との関係は不明であった。

## 2. 研究の目的

定常外力がある場合の 2 次元全空間および外部領域上の Navier-Stokes 方程式について、定常解の存在、一意性および安定性が成立するための、外部領域に対する対称性、および外力に対する対称性、大きさ、減衰の速さなどに関する十分条件を得るとともに得られた定常解の性質を調べることを、および初期摂動として許される関数に対する条件を調べることを目的とした。

また平行平板間の Navier-Stokes 方程式については、問題を Sobolev 空間および Besov 空間で考察し、これらの空間での適切性を研究対象とした。特に  $p$  が 1 あるいは無限大の場合は  $L_p$  空間や Sobolev 空間での解析は困難で、Besov 空間での考察が本質的に必要であった。

## 3. 研究の方法

(1) 全空間での定常解の存在および一意性については、外力に大きさの制限および対称性を仮定し、基本解の具体的表示を用いて線形問題の一意可解性を確立し、ついで非線形問題については不動点定理を用いて考察する。

(2) 外部領域での定常解の存在および一意性については、柴田良弘氏によって開発された、1 の分解を用いて問題を全空間と有界領域に分解することにより parametrix を構成する手法を用い、更に遠方での考察には

(1) で得られた結果を用いる

(3) 上で得られた定常解の安定性については、まず不動点定理を用いて非定常方程式の時間局所解を構成し、ついでエネルギー法を用いてその解が時間大域解に延長され、安定であることを示す。

(4) 平行平板間の流れについては、柴田氏および阿部孝之氏によって開発された解表示の公式と Littlewood-Paley 分解を組み合わせて考察する。

## 4. 研究成果

(1) 全空間での定常解については、外力に大きさの制限とともに当初の予定より強い対称性を仮定する必要があったが、無限遠方で速く減衰する十分小さい外力に対しては、原点からの距離に反比例する小さい定常解が一意的に存在することが示された。

(2) 外部領域については、(1) における考察を精密化することにより、外力の滑らかさに関する十分条件を緩和することに成功

した。またこの精密化によって、外力が十分速く減衰する場合には、原点からの距離に反比例するよりよい減衰をする定常解が存在し、このような減衰をする解の存在が存在するためには強い対称性が自然な条件であることがわかった。

(3) 定常解の安定性については、Galdi 氏との共同研究によって、定常解が十分小さければ、空間  $L_2$  に属するいくらでも大きい初期摂動に対しても非定常方程式の一意的な解が時間大域的に存在し、さらに定常解との差が空間  $L_p$  ( $p$  は 2 以上の有限の値) および空間  $H_1$  において時間が無限に大きくなると 0 に近づくことが示された。従って元の定常解が空間  $L_2$  に属する場合はそこでの global attractor となる。ただし定常解の減衰が原点からの距離に反比例する程度の場合は、領域、定常解および初期摂動に、定常解の存在のために課すものより弱い対称性を仮定する必要があった。

(4) 平行平板間の流れについては、阿部氏との共同研究によって、Sobolev 空間および  $p$  が 1 より大きい有限値の場合の Besov 空間では適切であったが、 $p$  が無限大の Besov 空間では外力がない場合でも自明でない解があり、これが Poiseuille 流に対応することがわかった。またこのことと双対的に、 $p$  が 1 の Besov 空間では解が存在するためには外力が代数的な等式をみたす必要があることがわかった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

1. Generalized Resolvent Estimates of the Stokes Equations with First Order Boundary Condition in a General Domain, Yoshihiro Shibata, 査読あり, J. Math. Fluid Mech. 15 (2013), 1 - 40, DOI 10.1007/s00021-012-0130-1
2. On the maximal  $L_p$ - $L_q$  regularity of the Stokes problem with first order boundary condition; model problems, Yoshihiro Shibata and Senjo Shimizu, 査読あり, J. Math. Soc. Japan 64 (2012), 561-626, DOI 10.2969/jmsj/06420561
3. On some decay properties of Stokes semigroup of compressible viscous fluid flow in a 2-dimensional exterior domain, Yuko Enomoto and Yoshihiro Shibata, 査読あり, J. Differential Equations 252 (2012), 6214-6249, DOI 10.1016/j.jde.2012.03.003
4. Nonlinear elliptic equations in strip-like domains, Jaeyoung Byeon and

- Kazunaga Tanaka, 査読あり, Adv. Nonlinear Stud. 12 (2012), 749-765.
5. Global existence results for Oldroyd-B fluids in exterior domains, Mattias Hieber, Yuka Naito and Yoshihiro Shibata, 査読あり, J. Differential Equations 252 (2012), 2617-2629, DOI 10.1016/j.jde.2011.09.001
  6. Unique existence of stationary solutions to the two-dimensional Navier-Stokes equations on exterior domains, Masao Yamazaki, 査読あり, Mathematical Aspects on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future-In memory of Professor Tetsuro Miyakawa, Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications Vol. 25, Gakkotosho, Tokyo, 2011, 220-241.
  7. Maximal  $L_p$ - $L_q$  regularity for the two-phase Stokes equations; model problems, Yoshihiro Shibata and Senjo Shimizu, 査読あり, J. Differential Equations 251 (2011), 373-419, DOI 10.1016/j.jde.2011.04.005
  8. Report on a local in time solvability of free surface problems for the Navier-Stokes equations with surface tension, Yoshihiro Shibata and Senjo Shimizu, 査読あり, Appl. Anal. 90 (2011), 201-214, DOI 10.1080/00036811003735899
  9. A local mountain pass result for a system of nonlinear Schrodinger equations, Norihisa Ikoma and Kazunaga Tanaka, 査読あり, Calc. Var. Partial Differential Equations 40 (2011), 449-480, DOI 10.1007/s00526-010-0347-x
  10. On a stationary problem of the Stokes equation in an infinite layer in Sobolev and Besov spaces, Takayuki Abe and Masao Yamazaki, 査読あり, J. Math. Fluid Mech. 12 (2010), 61-100, DOI 10.1007/s00021-008-0276-z
  11. Low frequency expansion in thermoelasticity with second sound in three dimensions, Yuka Naito, Reinhard Racke and Yoshihiro Shibata, 査読あり, J. Math. Soc. Japan 62 (2010), 1289-1316, <http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/06241289>
  12. The Fujita-Kato approach to the Navier-Stokes equations in the rotational framework, Mattias Hieber and Yoshihiro Shibata, 査読あり, Math. Z. 265 (2010), 481-491, DOI 10.1007/s00209-009-0525-8
  13. Local energy decay estimate of solutions to the thermoelastic plate equations in two- and three-dimensional exterior domains, Robert Denk, Reinhard Racke and Yoshihiro Shibata, 査読あり, Z. Anal. Anwend. 29 (2010), 21-62, DOI 10.4171/ZAA/1396
  14. Nonlinear scalar field equations in  $\mathbb{R}^n$ : mountain pass and symmetric mountain pass approaches, Jun Hirata, Norihisa Ikoma and Kazunaga Tanaka, 査読あり, Topol. Methods Nonlinear Anal. 35 (2010), 253-276.
  15. The stationary Navier-Stokes equation on the whole plane with external force with antisymmetry, Masao Yamazaki, 査読あり, Ann. Univ. Ferrara (7) Sci. Mat. 55 (2009), 407-423, DOI 10.1007/s11565-009-0080-6
  16. Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrodinger equations with steep potential wells, Yohei Sato and Kazunaga Tanaka, 査読あり, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 6205-6253.
  17.  $L_p$ - $L_q$  estimate of the Stokes operator and Navier-Stokes flows in the exterior of a rotating obstacle, Toshiaki Hishida and Yoshihiro Shibata, 査読あり, Arch. Ration. Mech. Anal. 193 (2009), 339-421, DOI 10.1007/s00205-008-0130-8
  18. On the  $L_p$  analytic semigroup associated with the linear thermoelastic plate equations in the half-space, Yuka Naito and Yoshihiro Shibata, 査読あり, J. Math. Soc. Japan 61 (2009), 971-1011, DOI 10.2969/jmsj/06140971
  19.  $L_p$  theory for the linear thermoelastic plate equations in bounded and exterior domains, Robert Denk, Reinhard Racke and Yoshihiro Shibata, 査読あり, Adv. Differential Equations 14 (2009), 685-715,
  20. On a resolvent estimate of the Stokes system in a half space arising from a free boundary problem for the Navier-Stokes equations, Yoshihiro Shibata and Senjo Shimizu, 査読あり, Math. Nachr. 282 (2009), 482-499, DOI 10.1002/mana.200710749
- [学会発表] (計4件)
1. The Stability of stationary solutions of the Two-Dimensional Navier-Stokes

- Exterior Problem, Masao Yamazaki, 第5回偏微分方程式研究集会, 招待講演, 名古屋大学, 2013年3月
2. Two-dimensional Navier-Stokes exterior problem with symmetry, G. P. Galdi and Masao Yamazaki, 国際研究集会 “Mathematical Fluid Dynamics and Nonlinear Wave”, 招待講演, 早稲田大学, 2012年8月
  3. Stability of stationary solutions of the 2D Navier-Stokes Exterior Problem, Masao Yamazaki, 国際研究集会 “Vorticity, rotation and symmetry (II) -Regularity of fluid motion”, 招待講演, マルセイユ, 2011年5月
  4. Stationary solutions of some symmetry of the two-dimensional Navier-Stokes exterior problem, Masao Yamazaki, 国際研究集会 “Mathematical Analysis on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future-Inmemory of Professor Tetsuro Miyakawa”, 招待講演, 神戸大学, 2009年12月

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山崎 昌男 (YAMAZAKI MASAO)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 20174659

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

柴田 良弘 (SHIBATA YOSHIHIRO)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 50114088

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 20188288