様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年０６月０４日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００９年度～２０１１年度
課題番号：２１５４０２１０
研究課題名（和文）　直接法による超離散系の数理

研究課題名（英文）　Direct methods for ultradiscrete systems

研究代表者
ウィロックス　ラルフ（WILLOX Ralph）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：２０３６１６１０

研究成果の概要（和文）：連続可積分系の適当な離散化で得られる「離散可積分系」という特別な離散的力学系の対称性を考察することにより，その離散系と密接な関係を持つ「超離散可積分系」という特殊なセル・オートマトンの対称性を解明し，可積分なセル・オートマトンの代表的な例である「超離散 KdV 方程式」の新しい解法を発見した．更に，離散可積分系の分類を行い，様々な離散可積分系の間の関係を解明し，低次元の場合には，既知の離散可積分系と類似の幾何学的な構造をもつ新しい可積分系をいくつか構成することに成功した．

研究成果の概要（英文）：Studying the algebraic structure of so-called discrete integrable systems - which can be obtained from continuous integrable systems by appropriate discretisation techniques - it proved possible to elucidate the symmetry structure of certain cellular automata known as "ultradiscrete integrable systems". As a result I obtained a novel technique for solving the so-called ultradiscrete KdV equation, which is the prototypical ultradiscrete integrable system. Moreover, the classification of certain types of discrete integrable systems not only led to the discovery of unexpected relations among them, but also, in the lower dimensional case, to extensions of the geometric structures of previously known discrete integrable systems to several new classes of discrete systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１０年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２０１１年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：可積分系，セル・オートマトン，超離散系，離散系

１．研究開始当初の背景

John von Neumann の自己増殖オートマトンを巡る研究に続き，単純な規則からなるセル・オートマトンはすでに３０年近く考察され，様々な分野で自然現象をシミュレートするために利用されている．主な応用は長い間複雑系の記述であったが，１９９０年にソリトンの相互作用を示すセル・オートマトンが発見され，そのセル・オートマトンと連続のソ

リトン系との関係が「超離散極限」という特別な極限操作によって明らかになって以来,「可積分なセル・オートマトン」の研究が特に日本において盛んになった．近年，可積分なセル・オートマトンの典型である「箱玉系」が可解な格子模型の「クリスタル極限」と呼ばれている極限操作で特殊な量子可積分系と対応している事実も明らかになった．それ以来，箱玉系，そして一般の超離散可積分系は，古典可積分系と量子可積分系という２つの異なる世界の間に架かる橋として世界中活発に研究されてきた．例えば，シドニー大学，パリ大学やリーズ大学の研究グループの精力的な研究活動のほか，平成２１年１月から半年にかけて，ケンブリッジ大学のNewton Institute で行われた「Discrete Integrable Systems」という特別プログラムに，超離散可積分系についての研究集会が開催されたことも例として挙げられる．

超離散系は格子上で定義される従属変数の離散的な増加・減少を記述し，max と + という２つの演算子を用いて表現できるセル・オートマトンである．その方程式が発展方程式である場合，超離散系のシミュレーションは可能であるが，方程式自体を厳密に解くことは一般には不可能である．幸いに，可積分な超離散系は大概離散的な可積分系の「超離散極限」と呼ばれている特殊な極限として得られるものであり，もとの離散系の解がこの極限を持つなら，離散系における解の極限として超離散系の解を求めることは可能である．逆に，超離散系のシミュレーションによって新しい解が発見された場合，その解を厳密に考察するには，まず，もとの離散系において，適切な極限を持つ解を探索する必要がある．ところが，上述の手続きが困難である場合も多く，適切な解が見つからない場合もある．ここで，連続の可積分系と離散可積分系において重要な役割を果たしている Darboux 変換という方程式の特別な対称性を超離散系の場合へ拡張できたら，連続系や離散系に頼らず，直接に超離散系のレベルで厳密解を系統的に構成するが可能となるというアイデアは本研究課題の申請時の独創的な着想であった．

２．研究の目的

Darboux 変換という概念により，可積分系の自明な解から変換の反復で次々に非自明な解を構成することは可積分系という分野のひとつの重要なテクニックである．しかし，連続や離散可積分系においては，よく利用されている手法でありながらも，超離散系への応用は申請時までほとんどなかった．その理由は，超離散系の幾何学的な構造，そしてそれと関係する対称性はまだよく知られていなかったことである．
Darboux 変換の構造と性質を解明するためには，まず離散可積分系の対称性を考察する必要があった．その問題に関して，Darboux 変換と「幾何クリスタル」という離散系の代数的な構造との関係を明らかにすることは一つの魅力的な戦略であった．幾何クリスタルは「超離散化」の過程で量子代数と対応するもの（すなわち，普通の “量子” クリスタルを超離散極限で引き起こすようなもの）とされ，古典可積分系の対称性との関係は，今までよく分かっていない．しかし，離散 KP 階層や幾何クリスタルと密接な関係を持つ Yang-Baxter 写像（すなわち，Yang-Baxter 関係式を満たす写像）との関係は申請時に解明され，代表的な離散可積分系である離散 KP 方程式とその拡張から得られる Yang-Baxter 写像を考察することにより，古典可積分系の対称性と幾何クリスタルとの関係を明らかにすることは，本研究計画の一つの目的であった．

もう一つの研究テーマは，上述の直接法，つまり超離散極限に頼らない解法を補完するもので，超離散系における厳密解を構成するための手法を打ち立てることである．離散系の超離散極限を取ると，離散系の主な性質だけではなく，一般解の安定性等と関わる細かい情報が極限後でも生き残る可能性があることは申請時に明らかになった．同様に，可積分系においても，ソリトン相互作用などの超離散極限に対して割と ロバストである性質以外にも，色々な性質が超離散系に残る可能性は十分あると思われ，Darboux 変換による解法で超離散可積分系の一般解が記述できることを証明するのは，本研究課題の重要な目的であった．

３．研究の方法

本研究課題の研究目的を達成するために，離散系と超離散系における Darboux 変換の構成について研究する必要があり，その研究を２つの手段で行った．一つは，Darboux 変換の持つ代数的な構造と可積分な超離散系に対応する Yang-Baxter 写像との関係を解明し，超離散化可能な離散可積分系と幾何クリスタルの理論との関連を考察することである．特に，離散 KP 方程式のように A-型の対称性を持つ離散可積分系の次に B-型の対称性を持つ離散可積分系の Yang-Baxter 写像とそれらの超離散極限における対称性を考察した．
もう一つの手段は，離散 Painleve 方程式のような低次元可積分系の対称性と超離散極限を調べることである．そのために離散

Painleve 方程式等の様々な対称性を持つ低次元の離散可積分系を構成する必要があり，それらと既知の高次元可積分系との関係を調べる必要があった.

上述の手段のほか，超離散可積分系の代表的な例である超離散 KdV 方程式の線形問題を考察し，それにおける Darboux 変換の性質を直接に調べる戦略もあった．実は，大変難しい問題ではあったが，結局，この手段によって超離散 KdV 方程式の一般的な初期値問題を解くことに成功した.

４．研究成果

(1) 離散可積分系の代数的な構造と超離散可積分系の対称性との関係については，離散ソリトン系の超離散化可能な表現を得るためのより広い範囲で適用できる構成方法を考案し，以前に離散 KP 階層から Yang-Baxter 写像（Yang-Baxter 方程式の集合論的な解）として解釈できる離散可積分系を得るために開発した手法を，普通の離散 KP 階層と異なる対称性を持つ B-型離散 KP 階層へ拡張することに成功した．その新しい手法により，B-型離散 KP 階層に対応する Yang-Baxter 写像を構成し，特にその Yang-Baxter 写像の超離散極限をとることにより，A_2^(2) 型と A_1^(1) 型の組み合わせ論的 R に対応する時間発展を結合させるセル・オートマトンを構成することができた.

(2) 可積分な２階非線形差分方程式，つまり平面上の可積分な写像に関しては，以下の研究成果を得た.

① 平面上の可積分な写像のプロトタイプである Quispel-Roberts-Thompson (QRT) 写像が bi-quadratic な不変量を持つことはよく知られていることであり，その不変量による写像の分類も知られているが，高次の不変量を持つ写像の実例が少ない．そこで，離散パンルヴェ方程式における folding 変換という特殊な変数変換を用いて，高次不変量を持つ可積分な２階非線形差分方程式の新しい構成方法を提案し，新しい可積分な写像をいくつかも構成できた.

② 周期係数の bi-quadratic な不変量を持つ２階非線形差分方程式を系統的に構成し，QRT 写像の拡張を得ることができた．さらに，任意の周期を持つ平面上の可積分な写像が存在することを証明し，その写像の楕円関数解を構成した.

③ 上述のような高次不変量や周期係数の不変量を持つ平面上の可積分な写像に対して，それぞれの不変量が定める「correspondence」と呼ばれる多価写像を考察した．一般の代数的 correspondence が定める像の数は指数関数のように急増するが，像の数が多項式のように増加し，そのために可積分系であると思われる correspondence も存在する．例えば，QRT 型の不変量は一次多項式のような増加を引き起こすことはよく知られている．①，②で述べたような新しく構成できた写像に対応する correspondence を調べた結果，可積分な correspondence をいくつか発見し，それらが引き起こす像の数の増加率はすべて唯一の組み合わせ論的な量で記述できることを示した.

(3) 超離散可積分系の直接法による解法に関しては，以下の研究成果を得た.

① 連続 KdV 方程式の場合に成り立つ Crum-Darboux の定理を超離散 KdV 方程式へ拡張することに成功し，それにより，整数全体で定義されている超離散 KdV 方程式における初期値問題を解くことに成功した．特に，任意の（整数上の）初期状態が超離散 KdV 方程式の時間発展によってソリトンの列と速度１で進む「背景」に分離することを示し，一般的な背景と単独のソリトンとの相互作用の漸近的な記述により，ソリトンの背景の部分による位相のずれを厳密に計算することができた.

② 更に，整数上の初期値問題に関して得られた結果を拡張し，超離散 KdV 方程式の実数全体における一般的な初期値問題を解くことにも成功した．特に，考案した解法を用いて，超離散 KdV 方程式の一般解の漸近的挙動を解明した.

(4) 連続可積分系の離散化に関しては，以下の研究成果を得た.

① 広田の双線形化法において高々２つのタウ函数で双線形化できる離散可積分系の分類により，その離散可積分系を互いに結びつける Miura 変換という従属変数変換をすべて構成した．その結果，２０年以上前から研究されている modified KdV 方程式と sine-Gordon 方程式の離散化が，実際，同一の離散系であることを判明した.

② 広田・Mickens の離散化手法に基づき，Painleve I と Painleve II と呼ばれている常微分方程式の離散化を行い，既知の離散 Painleve 方程式以外，E_8^(1) 型アフィン Weyl 群対称性を持つ可積分な写像と関係す

る新しい離散 Painleve 方程式を得ることができた．更に，いくつかの新しい「Gambier型」という線形化可能な離散可積分系も得られた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① R. Willox, A. Ramani, J. Satsuma and B. Grammaticos, A KdV cellular automaton without integers, Contemporary Mathematics, 掲載 決定済 (2012), 査読：有

② B. Grammaticos, A. Ramani, J. Satsuma and R. Willox, Discretising the Painleve equations a la Hirota-Mickens, Journal of Mathematical Physics, 53 (2012) 023506 (24p), 査読：有
DOI: 10.1063/1.3682240

③ B. Grammaticos, A. Ramani, K.M. Tamizhani and R. Willox, On Quispel-Roberts-Thompson extensions and integrable correspondences, Journal of Mathematical Physics, 52 (2011) 053508 (11p), 査読：有
DOI: 10.1063/1.3588166

④ B. Grammaticos, A. Ramani, C. Scimiterna and R. Willox, Miura transformations and the various guises of integrable lattice equations, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 44 (2011) FT: 152004 (9pp), 査読：有
DOI: 10.1088/1751-8113/44/15/152004

⑤ B. Grammaticos, A. Ramani and R. Willox, Folding transformations and HKY mappings, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 18 (2011) 75-85, 査読：有
DOI:10.1142/S1402925111001179

⑥ A. Ramani, B. Grammaticos and R. Willox, Generalised QRT mappings with periodic coefficients, Nonlinearity, 24 (2011) 113-126, 査読：有
DOI: 10.1088/0951-7715/24/1/006

⑦ R. Willox, Y. Nakata, J. Satsuma, R. Ramani and B. Grammaticos, Solving the ultradiscrete KdV equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 43 (2010) FT 482003 (7pp), 査読：有
DOI: 10.1088/1751-8113/43/48/482003

⑧ S. Kakei, J.J.C. Nimmo and R. Willox, Yang-Baxter maps from the discrete BKP equation, SIGMA 6 (2010) 028 (11pp), 査読：有
DOI: 10.3842/SIGMA.2010.028

〔学会発表〕（計４件）

① Ralph Willox, The ultradiscrete KdV equation defined over the real numbers, Tropical Geometry and Integrable Systems, 2011年7月5日, University of Glasgow, スコットランド(連合王国)

② Ralph Willox, 超離散 KdV 方程式の解法, 無限可積分系セッション・特別講演, 日本数学会・秋季総合分科会, 2010年9月24日, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

③ Ralph Willox, Solving the initial value problem for the ultradiscrete KdV equation, Integrable Systems and Geometry, ICM 2010 Satellite Meeting, 2010年8月16日, Pondicherry University, インド

④ Ralph Willox, Constructing ultradiscretisable Yang-Baxter maps, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, 2010年1月7日, 紹興市, 中国

６．研究組織
(1)研究代表者

ウィロックス ラルフ (WILLOX Ralph)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：２０３６１６１０

(2)研究分担者

／

(3)連携研究者

／