

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：12611

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540213

研究課題名(和文)非可換確率空間における確率分布の変形に関する研究

研究課題名(英文)Deformations of probability distributions on non-commutative probability spaces

研究代表者

吉田 裕亮 (YOSHIDA, Hiroaki)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授

研究者番号：10220667

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：可換確率空間における確率分布の量子変形の重要な例として変形 Meixner 分布と、それを分布として持つ確率変数を変形 Fock 空間上の生成・消滅作用素を用いて構成した。さらに分布の変形に呼応したエントロピーならびにフィッシャー情報量の変形に関する基礎的な調査研究も併せて行った。特に、自由確率論の場合に、相対自由エントロピーと相対自由フィッシャー情報量に関する幾つかの不等式に関して自由拡散過程に基づいた別証明を与えた。

研究成果の概要(英文)：In this project, a deformed family of the classical Meixner distributions was considered as one of important examples for quantum deformations, and non-commutative random variables having these deformed Meixner distributions were constructed on the deformed Fock space by using the corresponding deformed annihilation and creation operators. We have also investigated the fundamental theories on quantum deformed entropy and Fisher information. Especially, in the case of free probability, we have given another proofs for several inequalities on the relative free entropy and the free Fisher information based on the free diffusion processes.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数解析学 作用素環論 非可換確率論 変形分布論 量子情報理論

1. 研究開始当初の背景

本研究は非可換確率空間における確率分布の変形、特に独立性の概念の変形に基づきこれらに呼応した確率分布の量子変形を研究対象としている。非可換確率空間においては独立性の概念は一通りではない。独立性とは、任意の混合モーメントの計算則を与えるものと考えらるならば、ある公理の下では、3種類しか入らない。すなわち「通常(テンソル)独立」、「自由独立」、「プール独立」の3つである。しかし、これは独立性の陽(explicit)な捉え方である。非可換確率論においても独立性の概念は分布の(加法的)合成積を導き、合成積はいわゆるモーメント・キュムラント公式で記述される。したがって、モーメント・キュムラント公式が、陰(implicit)に独立性を定めていると考えられる。これを非可換確率空間における独立性の変形の鍵と捉えて研究代表者は調査研究を行ってきた。上記の3つの独立性、「通常」「自由」「プール」に対応するモーメント・キュムラント公式には驚くほど密接な組合せ論的類似性があることが発見されていた。それは、線形順序集合の分割との関連である。通常の独立性によるモーメント・キュムラント公式はすべての分割に対応する。有限個の元からなる線形順序集合の分割全体は、束をなし、自由独立性によるモーメント・キュムラント公式は、部分束である非交差分割に対応する。またプール独立性によるモーメント・キュムラント公式は、更に非交差分割の部分束である区間分割に制限が加えられることになる。このような組み合わせ論的な性質に着目し、本研究課題に繋がった前研究課題においては、Fock空間とその上の生成・消滅作用素の交換関係と、集合分割に与えられる分割統計(分割における各ブロックの荷重)の関係に関する調査研究を行って来ていた。特に、通常の独立性と自由独立性を1径数で補間する q -変形に関しては q -Fock空間と分割統計としては交点数の q -数え上げが対応することを示し、 q -Poisson分布と、これを分布として持つ作用素を q -Fock空間上の生成・消滅作用素で構成することに成功していた。Fock空間の変形から確率分布の変形を捉える研究を行った前課題の調査により、分割に各ブロックの荷重を調整することによりモーメント・キュムラント公式の変形を導出することが可能となり、この変形に対応する変形 Gauss および変形 Poisson 等の基本的な確率分布の変形が得られることが明らかになった。

以上のことから、本研究課題においては、非可換確率空間において、さらに一般の確率分布の変形ならびに、これら変形に呼応した確率分布の重要な不変量であるエントロピーおよびフィッシャー情報量の変形の構成を目指すべく研究を開始することとした。

2. 研究の目的

通常確率空間とは、基礎空間 X 上の \mathbb{C} -代数 \mathcal{A} 、確率測度 μ からなる3つ組 (X, \mathcal{A}, μ) である。また確率変数 x とは \mathcal{A} 上の可測関数であり、 x が可積分ならば、その期待値 $E(x)$ は \mathcal{A} 上の μ による積分で与えられる。ここで \mathcal{A} 上の有界な可測関数全体からなる関数環(ただし、和および積は \mathcal{A} の各点毎の和および積として与える)を考えると、これは可換な Banach 代数をなし、この可換な Banach 代数と \mathcal{A} 上の積分で与えられる期待値写像を併せれば、Gelfand の定理により、元の確率空間を復元するに足る十分な情報が含まれていることが分かる。

非可換確率空間とは、このような代数的な性質だけに注目し、確率空間を代数的に取り扱うことにより、抽象的に非可換化することである。すなわち A を単位元 1 を含む一般に非可換な代数とする。また、 τ を $(1) = 1$ を満たす A 上の線形汎関数とする。このとき、これらの組 (A, τ) を一般に非可換確率空間と呼ぶ。もちろん、このとき A の要素は確率変数であり、 τ は期待値を与えると考えられる。本研究では、特に A が C^* 代数、 τ を A 上の状態を組にして取り扱うことになる。これは分布というものがより現実的なものとして与えられる場合でもある。実際、 A が C^* 代数、 $a \in A$ が自己共役作用素のときは、スペクトル分解を考えることにより、スペクトル測度を介して実数上のコンパクトな台をもつ確率測度が自然に誘導される。本研究課題においては、このような非可換確率空間において、独立性の概念の変形と両立する確率分布の変形を主たる調査研究の対象とした。

独立性の概念は非可換確率空間においても加法的合成積を導き、加法的合成積はいわゆるモーメント・キュムラント公式で記述される。しかも、通常、自由、プール独立性に対応するモーメント・キュムラント公式らには驚くほど密接な組合せ論的類似性があることは第1項で述べた通りである。本研究課題では今までの加法的合成積のモーメント・キュムラント関係のみではなく、乗法的合成積に着目した分布の新たな変形手法の開発も目指した。通常確率論の場合、乗法的合成積は非常に自明となるが、しかし、非可換確率空間の場合、乗法的合成積は真に非可換性が反映されたリッチな議論が可能な世界である。Dykema により自由独立性に基づく自由確率論の場合に、モーメントと乗法的半不変量(乗法的合成積におけるキュムラントと考えられる)の組み合わせ論的な考察がなされ、その結果、通常の集合の非交叉分割を拡張した「絡み有り非交叉分割」(non-crossing linked partitions) が重要な役割りを果たすことが導かれた。研究代表者は、この「絡み有り非交叉分割」が自由確率論において無限分解可能な分布の多くを包括する Meixner タイプの分布に密接に関連

することを以前に指摘した。すなわち全 Fock 空間上で真空期待値に関して自由 Meixner 分布をその分布にもつ作用素を構成し、これらと自由乗法的合成積の標準作用素との対比より「絡み有り非交叉分割」との関連を付けた。

本課題においては、この拡張された集合分割の概念を非交叉に限らない一般の場合に拡張することにより、「絡み有り分割」を考え、交叉数の q -数え上げを行うことにより Meixner クラスの q -変形分布をもつ作用素が q -Fock 空間上で構成可能であることを明らかにすることを第 1 段階での目標とした。さらに、これら q -Meixner 分布の高次モーメントを決定することにより、モーメント母関数とそれに付随する直交多項式系も明らかにすることも目的とした。

Meixner クラスの確率分布は Fisher 情報量から見て特徴的な分布であり、通常の場合においては幾つかのそれら分布の特徴付けも知られている。自由確率論における自由 Fisher 情報量は Voiculescu により導入されているが、一般の非可換確率空間では、未だ整備されていない。研究代表者は、例えば q -変形 Meixner 分布を特徴付ける量として、自由確率論における自由 Fisher 情報量と通常の場合の Fisher 情報量を補間する、いわゆる q -Fisher 情報量のひとつの候補が与えられるものと考え、自由 Fisher 情報量の新たな視点での解析ならびに micro-states free 手法による自由エントロピーの構成方法の調査研究も行うこととした。

以上のように、本研究課題は、新たな変形分布の構成手法の総合的な開発と共に分布に付随する Fisher 情報量ならびにエントロピーの変形の可能性に関する調査研究をその目的とした。

3. 研究の方法

非可換確率空間では乗法的合成積には、通常の場合とは大きな違いがある。上記の項目 2 にも記述したように、Dykema により自由独立性に基づく自由確率論の場合に、モーメントと乗法的キムラントの組み合わせ論的な考察がなされた。この結果、通常の場合の非交叉分割を若干拡張した、「絡み有り非交叉分割」(non-crossing linked partitions) が重要な役割を果たすことが導かれた。この拡張された分割の非交叉性は自由独立性に由来するものであり、Dykema の導出した乗法的合成積に関する関係式は Voiculescu や Speicher による自由確率論における複合 Poisson 分布の構成手法と密接に関連することは知られていた。研究代表者はこの「絡み有り非交叉分割」による関係式がさらに自由独立性の意味での無限分解可能分布の多くを包括する Meixner タイプの分布に密接に関連することを指摘し、non-crossing linked

partitions と free Meixner 分布との関係を全 Fock 空間上で対応する作用素を構成することにより明らかにすることに成功していた。本研究課題の初期段階においては、まずこの自由確率論での結果を q -変形 Fock 空間に拡張することにより q -Meixner 分布の解析に取り組んだ。すなわち、非交叉に制限されない「絡み有り分割」を考え、加法的モーメント・キムラント公式の変形の際に行った交叉数の q -数え上げの手法を用いて q -変形を用いて Meixner クラスの q -変形分布を分布を持つ作用素を q -変形 Fock 空間上の q -生成作用素と q -消滅作用素、さらに q -個数作用素で構成する方法を行った。さらに、研究代表者が以前に行った q -Poisson 分布の高次モーメントを計算する手法を拡張することにより、この q -Meixner クラス作用素の真空期待値に関する高次モーメントの計算を行い、モーメント母関数と分布に付随した直交多項式関係を明らかにしていく手法を用いた。これは、 q -Gauss 分布の q -Wick 公式を特別な場合として含む拡張にあたる方法である。

これまでの非可換(量子)確率空間における分布の変形の多くは加法的合成積の変形から導出されたものあり、乗法的合成積に基づき変形を議論した研究は、未整備のままであった。また分布の変形から分布に付随する Fisher 情報量の変形を議論するという研究もまだなされていない状況にあり、先駆的な取り組み方法でもあった。乗法的合成積の組み合わせ論的考察により分布の変形が、今までの手法と両立して可能であることが示されれば、もっと一般の分割統計に基づく変形への可能性が膨らみ、この分野の飛躍的な発展に繋がる手法でもある。

また、確率分布の特徴量を定める Fisher 情報量およびエントロピーについては、その密接な関係が知られている。すなわち通常の場合の確率論における Gauss 摂動により de Bruijn 等式である。自由確率論における自由 Fisher 情報量と半円摂動(半円分布は自由確率論では Gauss 分布に相当する)についても de Bruijn 等式は Voiculescu の自由エントロピーの micro-state free 構成法に相当する。これらの関係を一般の変形独立性に拡張して調査することにより、確率分布の変形の合理性の根拠と成り得るのではないかとこの着想に基づき、分布の変形の研究の深化と共に Fisher 情報量ならびにエントロピーの変形に関する調査も同時に行うことにより、本研究課題の更なる発展に繋がるような研究方法を用いた。

本研究課題を遂行するにあたり、各年度とも国内外での関連研究会において研究成果の発表ならびに関連研究者との研究討議および研究資料の収集も積極的に行い、常に最新の研究動向を把握しながら、研究課題を遂行した。

4. 研究成果

(1) 変形 Meixner 分布に関する研究成果

自由確率論において「絡み有り非交叉分割」が無限分解可能な分布の多くを包括する Meixner タイプの分布に密接に関連することは、研究代表者によって指摘されていた。本研究課題では、この絡み有り集合分割の概念を非交叉とは限らない一般の分割に拡張することにより、交叉数の q -数え上げを分割統計として与えることにより、Meixner クラスの q -変形分布をもつ作用素が q -対称 Fock 空間上で構成可能であることを明らかにした (第 5 項 [学会発表])。

この Meixner クラスの変形に関しては、以下のように拡張された。すなわち、 q -対称 Fock 空間上の q -2 重生成作用素と q -2 重消滅作用素を用いることにより自己共役な q -変形 Meixner 分布を持つ非可換確率変数の構成に成功した。この確率変数の自己共役性は、理論的かつ物理学的にも重要な意味を持っている。ここで構成された確率変数に対応する Meixner 分布の q -変形は、今まで知られていた「絡み有り分割」の交叉数の q -数え上げを行うことにより得られる q -Meixner 型作用素とは、異なるものであり、実際に変形パラメータが q ではなく、 q の 2 乗で与えられることになることが明らかにされた (第 5 項 [雑誌論文] , [学会発表])。

(2) 自由 Fisher 情報量距離に関する研究成果

上記、第 2 項でも述べたように Meixner クラスの確率分布は Fisher 情報量から見て特徴的な分布であり、幾つかの分布の Fisher 情報量による特徴付けも知られている。そこで本研究課題では、自由確率空間における Fisher 情報量距離に関する調査研究を通して、分布の変形と、この変形と両立するような Fisher 情報量の変形への研究課題発展の基礎を固めることも行った。

まず、自由確率論の場合、Fisher 情報量距離と自由相対エントロピーの関係、いわゆる、半円摂動による de Bruijn 等式の作用素論的な解釈を与えた (第 5 項 [雑誌論文] , [学会発表])。同時に、この自由 Fisher 情報量距離に基づく、自由 2 項分布の Poisson 極限定理の別証明も与えた (第 5 項 [雑誌論文] , [学会発表])。

更に、通常確率論および自由確率論の双方において、相対エントロピーが相対 Fisher 情報量の積分表現が、全く同じ形式で実現可能であることを明らかにし、この積分表現を用いることにより、通常確率論の場合には、Gauss 分布に関する対数 Sobolev 不等式が、また自由確率論の場合には、半円分布に関する自由対数 Sobolev 不等式が導かれることも明らかにした (第 5 項 [雑誌論文] , [学会発表])。

(3) 自由拡散過程と自由関数不等式への応用に関する研究成果

相対エントロピーと関連の深い確率分布間の距離のひとつである Wasserstein 距離の自由確率論での振舞いについて調査を行った。上記の研究 (3) で触れた de Bruijn 等式とは、確率過程の言葉では、単純な熱拡散による時間発展を考えるとエントロピーの時間微分が Fisher 情報量のマイナス量で与えられることである。ここで単純な熱拡散とは、すなわちドリフト項を持たない拡散項のみの拡散過程に対応し、reference 測度としては Lesbegue 測度を用いたことに相当する。そこで考える相対 Fisher 情報量および相対エントロピーでは、拡散過程が以下のように一般化された状況を考える。すなわち、ある凸関数をポテンシャルとするドリフト項を持つ拡散過程による時間発展を考え、その平衡測度 (Gibbs 測度) を reference 測度とする場合である。この自由独立性に基づく拡散過程における自由相対エントロピーの時間微分と自由相対 Fisher 情報量との関係より、対数 Sobolev 不等式および輸送コスト不等式などの関数不等式の時間積分の手法を用いて導出する手法を開発した (第 5 項 [学会発表])。

この研究方向は、現在新たな研究課題の下で、更なる調査研究を継続中である。

(4) 自由乗法的合成積のスケーリング極限に関する研究成果

自由確率論において、乗法的合成積の n -重積の n -重加法的合成積のスケーリング極限分布の解析を行った。この分布の S -変換は Lambert 関数を用いて表現できる分布であり、このような分布の存在はモーメント手法により以前から知られていたが、具体的に極限分布として構成されたのは、本研究が初めてである。

また、この極限分布の R -変換の積分表示を求め、これを用いて Levy 測度を決定することにも成功した。したがって、特にこの極限分布が自由無限分解可能分布であることが導かれた (第 5 項 [雑誌論文])。

なお、この極限分布は unitary ブラウン運動の時間負無限大の極限分布に対応することが最近、カナダの関連研究者の調査により報告され、今後の発展が望まれる研究領域でもある。

(5) ランダム行列モデルに関する研究成果

自由独立性の漸近モデルとしてランダム行列は重要である。従来多くのランダム行列の研究では、その成分が独立であるとして、固有値経験分布の漸近挙動の研究が多くなされて来ていた。最近、成分間に相関が存在するようなランダム行列に関する研究が行われ始めた。これは、実際の大規

模統計的データ解析にも応用可能な研究領域でもある。

本研究課題でも成分間に相関が存在するようなランダム行列として、成分が移動平均(MA)モデルで与えられる時系列を成分にもつランダム行列の固有値分布の調査研究も行った。特に、行方向にMAモデルとしての相関がある時系列を成分とするランダム行列を考え、それをデータ行列としてWishart行列を構成し、Marchenko-Pastur型のスケーリング極限での固有値経験分布の挙動を解析した。その結果、それらはすべて自由複合Poisson分布のクラスの分布にalmost surelyに収束することが示された。またその実時系列データへの応用の可能性に関しての議論も併せて行った(第5項[雑誌論文])。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Ayako Hasegawa, Noriyoshi Sakuma and Hiroaki Yoshida, "Random Matrices by MA models and compound free Poisson laws", *Probab. Math. Statist.* **33**, (2013), 243-254. (査読有)
<http://www.math.uni.wroc.pl/~pms/files/33.2/Article/33.2.6.pdf>

Noriyoshi Sakuma and Hiroaki Yoshida, "New limit theorems related to free multiplicative convolution", *Studia Math.* **214** (2013), 251-264. (査読有)
DOI:10.4064/sm214-3-4

Miku Hirata, Aya Nemoto, and Hiroaki Yoshida, "An integral representation of the relative entropy", *Entropy* **14** (2012), 1469 - 1477. (査読有)
DOI:10.3390/e14081469

Hiroaki Yoshida, "The q -Meixner distributions associated with a q -deformed symmetric Fock space", *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, (2011) 165306 (8pp). (査読有)
DOI:10.1088/1751-8113/44/16/165306

Hiroaki Yoshida, "Remarks on the free relative entropy and the free Fisher information distance", *Infin.Dim. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.* **13** (2010), 243 - 255. (査読有)
DOI:10.1142/S0219025710004048

[学会発表](計15件)

Hiroaki Yoshida, "The free logarithmic

Sobolev and transportation cost inequalities by time integration", *The 8th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability*, 2013年8月20日, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "Applications of dissipation formulas of the relative free entropy", *International Workshop on Noncommutative Analysis and its Future Prospects*, 2013年8月6日, Hokkaido University, Sapporo, Japan. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "Applications of the time derivative of the Wasserstein distance and the free entropy dissipation", *Workshop on Analytic, Stochastic, and Operator Algebraic Aspects of Noncommutative Distributions and Free Probability*, 2013年7月23日, Fields Institute, Univ. Toronto, Toronto, Canada. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "On derivation of the relative free entropy and the Talagrand's inequality for the semi-circle law", *The 15th Workshop: Non-Commutative Harmonic Analysis*, 2012年9月26日, The Mathematical Research and Conference Center Banach Institute, Bedlewo, Poland. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "Integral representations of the relative free entropy associated with semicircular gradients", *The 14th Workshop Non-Commutative Harmonic Analysis*, 2011年9月27日, The Mathematical Research and Conference Center, Banach Institute, Bedlewo, Poland. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "The free Poisson limit by the free Fisher information distance", *Sapporo Workshop on Non-Commutative Analysis and Applications to Complex Phenomena*, 2011年9月01日, Hokkaido University, Sapporo, Japan. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "On self-adjoint q -Meixner operators", *The 6th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability*, 2011年1月10日, National Institute for

Mathematical Sciences, Daejeon, Korea.
(招待講演)

Hiroaki Yoshida, "On the free Fisher information distance and the logarithmic Sobolev inequality", *The 13th Workshop NonCommutative Harmonic Analysis*, 2010年7月14日, The Mathematical Research and Conference Center Banach Institute, Bedlewo, Poland. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "Remarks on the free analogue of relative entropy and of mutual information", *Neumann-Zeminarium*, 2009年11月10日, Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary. (招待講演)

Hiroaki Yoshida, "Linked partitions and deformed Meixner laws", *The 12th Workshop: Non-Commutative Harmonic Analysis*, 2009年8月20日, The Mathematical Research and Conference Center Banach Institute, Bedlewo, Poland. (招待講演)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

吉田 裕亮 (YOSHIDA, Hiroaki)
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授
研究者番号：10220667

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし