

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 2 日現在

機関番号： 14401
 研究種目： 基盤研究 (C)
 研究期間： 2009 ~ 2011
 課題番号： 21540216
 研究課題名 (和文) 正則写像半群とランダムな複素力学系の研究

研究課題名 (英文) Research on semigroups of holomorphic maps and random complex dynamics

研究代表者

角 大輝 (SUMI HIROKI)
 大阪大学・大学院理学研究科・准教授
 研究者番号： 40313324

研究成果の概要 (和文)：リーマン球面上の正則写像のなす半群の力学系と、リーマン球面上の正則写像族によるランダムな複素力学系を研究した。そのなかで、通常の一つの正則写像による力学系では決して現れない、新しい現象を多く発見し、それらを組織的に研究した。特に、ランダムな複素力学系では、ほとんど全てのシステムで、複数の写像が自動的に協力しあって平均化システムのカオスを消す（協調原理）を発見し、それを深く研究した。また、極限状態に現れる関数の複雑さ（ヘルダー指数など）を研究した。さらに、システムの安定性や分岐を研究した。

研究成果の概要 (英文)：I investigated the dynamics of semigroups of holomorphic maps on the Riemann sphere and the random complex dynamics on the Riemann sphere. I found many new phenomena which cannot hold in the usual iteration dynamics of a single holomorphic map. Moreover, I investigated those phenomena systematically. In particular, I found that in random complex dynamics, for a generic system, the chaos of the averaged system disappears due to the automatic cooperation of many kinds of maps in the system (cooperation principle). Also, I investigated many complex phenomena of limit functions of the systems. Moreover, I investigated stability and bifurcation of the systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：複素力学系・フラクタル幾何学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：複素力学系、カオス、フラクタル幾何学、ランダム力学系、複素解析学、エルゴード理論、ハウスドルフ次元、雑音誘起現象

1. 研究開始当初の背景

複素多様体 M の上の正則写像からなる、写像の合成を積とする半群（これを正則写像半群とよぶ）の、 M への作用を考える。特に、 M がリーマン球面の場合の上記の半群を有理

半群とよぶ。有理半群のリーマン球面上での力学系の研究は、一つの有理写像の反復合成を調べる従来の複素力学系の一般化であり、1990年代はじめに、A. Hinkkanen, G. J. Martin, F. Ren らによって研究されたのが

最初である。私は彼らと独立に、有理半群の力学系が研究対象になることに気づき、1994年頃から研究に着手した。また、有理半群の力学系の研究に類似のものとして、ランダムな複素力学系がある。これは1990年代はじめに、Fornaess, Sibony らによって調べられたのが最初であり、その後、2005年までに、ドイツの Bruck, Buger のグループ や中国の Ren の後継グループらによって研究がされていた。しかしながら、2005年までは、有理半群の力学系とランダムな複素力学系を結びつけて研究する者は皆無であった。なおもともとの複素力学系は、数理生物学における、生物の個体数変動の記述モデルなどが動機のひとつとなっており、ランダムな複素力学系はこの観点からして数学以外の分野への応用として大変重要であると思われる。ランダムな力学系の研究においては通常の力学系では現れない多くの興味深い現象（雑音誘起現象）が津田一郎氏（北大）、佐藤譲氏（北大）などの非常に多くの物理学者によって数値実験により発見され研究されてきていたが、それを数学的に調べたものはあまりなかった。

2. 研究の目的

1 で述べたような有理半群の力学系とランダムな複素力学系、さらに反復関数系の力学系のアイデア、これら複数の領域を互いに交錯させながら、全てを同時に発展させることが大きな目的である。これらの分野はそれぞれ数理モデルなどで重要であり、互いに関連付けて調べることで深い結果を見出す。これら複数の領域を交錯させて同時発展させることによって、新しい興味深い現象を発見し、そのメカニズムを追求することができるようになる。このことにより、カオス、フラクタルというキーワードで語られてきた分野に新しい知見をもたらし、ひいては数理科学全体に新しい視点を提供するということが究極の目的となる。

3. 研究の方法

(1) 有理半群、ランダムな複素力学系、反復関数系、など複数の理論をそれぞれ交錯させながら、全てを同時に発展させる。道具立てとしては、複素解析、エルゴード理論、ポテンシャル論、コホモロジー理論、などである。また、ランダム力学系の雑音誘起現象については、物理学者の数値実験によるランダム力学系についての膨大な研究知見も参考にする。

(2) R. Stankewitz 氏と多項式半群の力学系について共同研究を行った。その際、互いの所属大学を訪問し、また世界各地で行われる研究集会などで会い、アイデアを発展させた。

(3) M. Urbanski 氏と有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元について共同研究を行った。その際、互いの所属大学を訪問し、また世界各地で行われる研究集会などで会い、アイデアを発展させた。

(4) J. Jaerisch 氏（大阪大学ポスドク）と無限生成有理半群のジュリア集合の次元について共同研究を行った。

(5) 佐藤譲氏（北大）と実一次元ランダム力学系の雑音誘起現象について共同研究を行った。

(6) 国内外の様々な研究集会に参加し、最新の知識を得た。またこれらの研究集会においてこれまで得た結果を発表し、その反応により結果をさらに発展させていった。

(7) 高性能ノートパソコンを購入し、ジュリア集合や複素平面上の特異関数のグラフのグラフィクスを作成し、研究に役立て、発表時のプレゼンテーションに役立てた。

4. 研究成果

(1) 有理半群 G について「核ジュリア集合」というものを定義し、それが空になる場合に、付随するランダムな力学系については平均化システムの力学系（確率測度の空間の上で推移作用素の随伴による力学系）がカオス的な部分（ジュリア集合という）を持たないこと（協調原理）を発見し詳しく調べた。

さらに、ほとんどすべての多項式ランダムシステムについて、上記の核ジュリア集合が空になって平均化システムのカオスが消滅し、システムの摂動に関して安定性を持ち、かつ極限状態への移行はヘルダー連続関数が初期関数の場合は指数関数的に早い、ということなどを示した。このことから、ヘルダー連続関数の空間へ推移作用素を作用させたときには、1の固有値とそれ以外のスペクトルの部分にギャップが存在することが示される。それと作用素の摂動論を組み合わせ、有限個の多項式の族によるランダム力学系では多くの場合に、「一つの極小集合に近づいていく確率の関数」が確率パラメータに関して実解析的であることを示し、それによって「高木関数の複素平面上版」を非常に多くのランダム多項式力学系の族で得た。なお、ルベグの特異関数が実数上のあるランダム力学系の $+\infty$ に収束する確率の関数とみなせて、さらに高木関数がルベグの特異関数の確率パラメータによる偏導関数とみなせる、という、特異関数に対する報告者による新しい視点が以前に得られており、それに基づいて上記の「複素平面上での高木関数の

類似」という言葉遣いをしていることに注意しておく。

(2) R. Stankewitz 氏との多項式半群の力学系の共同研究において、ジュリア集合についての様々な結果を得て、最終結果を論文にまとめて出版した。

(3) M. Urbanski 氏との(半)双曲的有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元について様々な結果を得た。特に、多くの場合に、その次元が半群のポアンカレ級数の臨界指数と等しいことなどを示した。

(4) J. Jaerisch 氏と無限生成拡大的有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元について共同研究を行い、その次元が半群のポアンカレ級数の臨界指数と等しいことなどを示した。それを用いて、有限生成で拡大的に限らない有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元についても、ある場合にそれが半群のポアンカレ級数の臨界指数と等しいことなどを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

(1) H. Sumi, M. Urbanski, Bowen Parameter and Hausdorff Dimension for Expanding Rational Semigroups, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A. に掲載予定。査読有

(2) R. Stankewitz, H. Sumi, Dynamical properties and structure of Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 10, 5293--5319.
DOI: 10.1090/S0002-9947-2011-05199-8.
査読有

(3) H. Sumi, M. Urbanski, Measures and dimensions of Julia sets of semi-hyperbolic rational semigroups, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A, Vol. 30, No. 1, 313 -- 363, 2011.
DOI: 10.3934/dcds.2011.30.313.
査読有

(4) H. Sumi, Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups I: connected components of the Julia sets, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A, Vol. 29, No. 3, 2011, 1205--1244.

DOI: 10.3934/dcds.2011.29.1205.
査読有

(5) H. Sumi, Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps, Proc. London. Math. Soc. (2011), 102 (1), 50--112. DOI: 10.1112/plms/pdq013.
査読有

(6) H. Sumi, Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups III: classification of semi-hyperbolic semigroups and random Julia sets which are Jordan curves but not quasicircles, Ergodic Theory Dynam. Systems (2010), 30, No. 6, 1869--1902.
査読有

(7) H. Sumi, Rational semigroups, random complex dynamics and singular functions on the complex plane, Selected Papers on Analysis and Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 230, 2010, 161--200. 査読有

(8) H. Sumi, M. Urbanski, Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups, Ergodic Theory Dynam. Systems (2010), Vol. 30, No. 2, 601-633. 査読有

(9) H. Sumi, Interaction cohomology of forward or backward self-similar systems, Adv. Math., 222 (3) (2009) 729--781.
査読有

(10) H. Sumi, M. Urbanski, The equilibrium states for semigroups of rational maps, Monatsh. Math., 156 (2009), no. 4, 371--390. 査読有

(11) 魚大輝, 「有理半群, ランダムな複素力学系と複素平面上的特異関数」, 雑誌「数学」第 61 巻第 2 号 2009 年 4 月春季号論説 p133-161. 査読有

[学会発表] (計 21 件)

(1) H. Sumi, タイトル「Randomness-induced phenomena in random complex dynamics」研究集会「Dynamics of Complex Systems」北海道大学理学部 2012 年 3 月 8 日 招待講演

(2) H. Sumi, タイトル「Stability, Bifurcation and Classification of Minimal Sets in Random Complex Dynamics」研究集会「複素力学系の総合的研究」

京都大学数理解析研究所 2012年1月27日

(3) H. Sumi, タイトル 「Stability and bifurcation in random complex dynamics」 mini-workshop `Thermodynamic Formalism, Geometry and Stochastics'', ドイツ Oberwolfach 2012年1月2日 (招待講演)

(4) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle and stability in random complex dynamics」 研究集会 「Automorphisms of algebraic varieties -- Dynamics and Arithmetic」 和歌山県白浜町 2011年12月19日 (招待講演)

(5) H. Sumi, タイトル 「Stability and bifurcation in random complex dynamics」 研究集会 「The 19th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications」 広島市 アステールプラザ 2011年12月12日

(6) H. Sumi, タイトル 「Stability and bifurcation in random complex dynamics」 研究集会 「エルゴード理論とその周辺」 大阪大学 2011年12月8日

(7) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle and stability in random complex dynamics」 ドイツ研究集会 Goettingen-Penn State International Summer School on Dynamical Systems ドイツ ゲッティンゲン大学 2011年8月10日 (招待講演)

(8) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle and stability in random complex dynamics」 研究集会 「Dynamics of Complex Systems 2011」 北海道大学 2011年3月9日 (招待講演)

(9) 角大輝, タイトル 「Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics」 2010年度冬の力学系研究集会 東京工業大学 2011年1月8日

(10) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle and density of stable systems in random complex dynamics」 数理解析研究所研究集会 「複素力学系とその周辺分野の研究」 京都大学理学部数学教室 2010年12月8日

(11) 角大輝, タイトル 「Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics」 第53回 函数

論シンポジウム 名城大学 2010年11月23日 (招待講演)

(12) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle and disappearance of chaos in random complex dynamics」 国際研究集会 Stochastic Processes and Their Application 2010年9月7日 大阪 千里中央ライフサイエンスセンター

(13) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle and disappearance of chaos in random complex dynamics」 (アメリカ) 研究集会 Conference on Complex Analysis 2010年5月21-23日 (21日に発表) (招待講演) アメリカ University of Illinois

(14) 角大輝, タイトル 「Cooperation principle in random complex dynamics and singular functions on the complex plane」 2009年度冬の力学系研究集会 東京工業大学 2010年1月10日

(15) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle in random complex dynamics and singular functions on the complex plane」 研究集会 「複素力学系とその関連分野の総合的研究」 京都大学 2009年12月16日

(16) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle in random complex dynamics and singular functions on the complex plane」 研究集会 「エルゴード理論の最近の話題」 日本大学 2009年11月6日-9日

(17) 角大輝, タイトル 「ランダムな複素力学系における協調原理と複素平面の特異関数」 日本数学会秋季総合分科会 於大阪大学 2009年9月26日

(18) H. Sumi, タイトル 「Random complex dynamics and singular functions on the complex plane」 京都大学 研究集会 Kyoto Dynamics Days 8, 2009年9月12日 (招待講演)

(19) H. Sumi, タイトル 「Cooperation principle in random complex dynamics and singular functions on the complex plane」 京都大学 研究集会 XXIst Rolf Nevanlinna Colloquium, 2009年9月7日-11日

(20) H. Sumi, タイトル 「Random complex dynamics and singular functions on the complex plane」, Stony Brook University (アメリカ) 研究集会 ADVANCES IN LOW

DIMENSIONAL DYNAMICS 2009年6月8日-13日
(招待ポスターセッション)

(21) H. Sumi, タイトル 「Random complex dynamics and singular functions on the complex plane」, University of North Texas (アメリカ) 研究集会 Dynamical Systems II, 2009年5月17日-23日 (招待講演)

[その他]

ホームページ等:

主な研究論文や雑誌への掲載予定論文、投稿中論文などはホームページ

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/welcomeou-j.html>

にある。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

角 大輝 (Sumi Hiroki)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 40313324