**様式Ｃ－１９**

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　5　月　28　日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：　２００９～　２０１１
課題番号：２１５４０２１７
研究課題名（和文）　パンルヴェ方程式の漸近解析とモノドロミ問題

研究課題名（英文）　Asymptotic analysis on the Painlevé equations and monodromy problems

研究代表者
大山　陽介　　（OHYAMA YOUSUKE）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：１０２２１８３９

研究成果の概要（和文）： q-パンルヴェ方程式を解くことを考え、|q|=1 の場合に、第 1，第 2q-パンルヴェ方程式は無限遠の回りで収束する解を持つことを示した。特に q が 1 のべき根の時は超幾何函数で表されることを示した。また、q-超幾何函数の退化図式を構成して、７つの異なる方程式が得られることを示した。さらに、パンルヴェ方程式の漸近展開の収束性を調べつつある。また、モノドロミ非保存変形について不確定特異点の場合に調べた。

研究成果の概要（英文）：We study special solutions of the q-Painlevé equations. In the case |q|=1, the first and the second q-Painlevé equation has convergent solutions around the infinity. If q is a root of unity, they are represented by hypergeometric functions. We gave a coalescent diagram for q-hypergeometric functions and we obtain seven q-difference linear equations. For classical Painlevé equations, we are studying convergence of asymptotic expansions. We also studied that monodromy evolving deformations for irregular singular cases.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００９年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| ２０１０年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| ２０１１年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,400,000 | 1,020,000 | 4,420,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：可積分系、パンルヴェ方程式

１．研究開始当初の背景
複素領域における線型常微分方程式において、そのモノドロミを決定することはある意味で最終的な目標といってよいであろう。現在では、漸近解析を用いてある程度モノドロミを調べることができるようになっているが、もちろん最終的な目標には程遠い。
　そこで、我々はパンルヴェ方程式に付随する場合に「モノドロミ可解」というスローガンを掲げて、そのモノドロミ行列が局所特性指数のガンマ函数で明示できる例をいくつか構成してきた。一つは、合流超幾何方程式の被覆による場合であり、被覆の分類が第 1 から第 5 パンルヴェ方程式の代数解と対称解の分類と（ほぼ）一致することを示した。第二は、固定特異点の周りで解析的な解で、第 3，5、6 パンルヴェ方程式の場合に完全に分類が終わった。

モノドロミを求める方法として、一つは線型方程式を退化させて超幾何方程式に帰着させる手法がある（1984 年神保のアイデア、遡れば R. Fuchs)。4 点の点付き射影曲線を退化させることで、2 つの 3 点付き射影曲線を既約成分に持つ安定曲線を得る。この退化を曲線の上の線型方程式に持ち上げると、線型方程式が退化して 2 つの超幾何方程式に帰着するので、モノドロミを決定することができるのである。

今考えている、固定特異点の周りで解析的な解に対しては、片方の超幾何方程式が 2 つの一階方程式に分かれて、モノドロミ行列が同時対角化できるため、モノドロミ行列が局所特性指数のガンマ函数で表示できる。元の線型方程式はアクセサリ・パラメタを持ちつつ rigid 性と関係がありそうな問題である。

もう一つの方法は本質的には WKB 解析を用いるものである。パンルヴェ方程式と関係して求める研究としては (a) 河合・竹井・青木らの完全 WKB 法 (b) イッツ、カパエフ、キタエフらロシア人グループ　(c)　ダイフト、ズーによる最速降下による計算などが知られている。これらの漸近解析とモノドロミ問題は密接に関係しており、パンルヴェ方程式の研究において、もっとも重要な問題の一つである。

２．研究の目的

現状を踏まえて、まず q-パンルヴェ方程式に対してモノドロミ可解な解を調べていく。しかし、退化した場合については全くわかっていないので、q-差分方程式の不確定的な特異点についての局所理論の整備が最初の目的となる。

また、微分方程式の場合においても､。非ブリオ・ブーケ型の場合は形式解が存在しても一般には発散することが知られている。第 1～第 5 パンルヴェ方程式の無限遠は全て非ブリオ・ブーケ型である。無限遠の回りの局所解については、古くはブートルー、最近ではキタエフ、カパエフ、ジョーシらによって研究されている。基本的にはブートルー変換とよばれる代数的な変換を用いて、パンルヴェ方程式の形を楕円函数が満たす方程式に近似して漸近解を構成するのである（ジョーシの研究は多少異なる)。特に、ブートルー変換そのものをラックス対にまで拡張したカパエフの研究は興味深い。これらはほとんどが第 1 第 2 の場合のみであるので、第 3～第 5 の場合に拡張するのが目的である。

第 4 の場合に、類似の既知の研究としては、クラークソン・マックロード解（第 2 のアブロビッツ・シーガー解の類似）の研究があり、この解の一般化も大きな目的である。

前項とも関係するが、q-差分パンルヴェの漸近展開のためにはブートルー変換の q-類似が必要になるであろうし、楕円函数との親和性を考えると q-類似のほうが楽かもしれない。q-差分パンルヴェの漸近展開の場合は、その定義から始めることになる。

３．研究の方法

まず、q-パンルヴェ方程式について解析的な解を個別に研究していく。代数解や超幾何解と異なる、本質的に超越的な解はいまだによくわかっていないので、最初の出発点になる。

また、q-パンルヴェ方程式の漸近解析の前にの q-線型方程式の分類とその q-Stokes 現象についても調べていく。

パンルヴェ方程式の漸近解について、無限遠の周りでの挙動が明快ではないので、その点を明らかにしていきたい。

これらを実施する具体的な方法としては、毎月行われている古典解析セミナーによる意見交流、21 年度、英国ケンブリッジ・ニュートン研究所での離散可積分系のプログラムでの研究交流や、23 年度にサンクト・ペテロブルグで行われる研究会での研究交流を重視したい。また、フランスの特にストラスブールを中心とした研究交流は長年継続されたものであり、重視する。

４．研究成果

**(1) q-パンルヴェ方程式**

第 1、第 2q-パンルヴェ方程式において、q の絶対値が 1 の時には、無限遠でのべき展開が収束する解が存在すること、さらに、q が 1 のべき根の場合は、特殊解が超幾何函数で表示されることを示した。q-第 1、第 2 パンルヴェ方程式は q が一般の値の時は、すべての解が超越的（1 階差分方程式の解には帰着されない）ことがわかっており、この解は q-第 1、第 2 パンルヴェ方程式で厳密に求められた特殊解の最初の例になっている。同様の解はほかの q-パンルヴェ方程式でも（計算は複雑になるが）構成することは可能であり、おもしろい役割を果たすと期待される。

**(2) q-差分方程式の接続問題**

超幾何型 q-差分線型方程式の統一理論を展開した。q-特殊函数については、古典型の特殊函数と異なり、統一的な始点による研究が少ないため、とりあえずラプラス型について分類すると、基本超幾何函数の合流として 7 つのタイプがあることがわかった。古典的な場合だと 5 つだが、エアリーとベッセルに対応する場合がともに 2 つあるためである。q-エアリー函数が第三 q-ベッセル函数の特殊化として得られることを示したこと、さらに、2 つの q-エアリー函数がシェアリング変換で移り合うことは大きな発見であろう。さらに、

修士１年の森田健君が接続問題を解いたことで、2 つの q-エアリー函数の関係が完全に明らかになった。また、リーマン・スキームの q-類似の構成など、q-差分線型方程式を考察するうえでの基本的な道具立てを整備できた点も、今後の研究に役立つと思われる。
この分類によって、q-パンルヴェ方程式の超幾何解との関連も明確になり、本研究の大きなテーマの一つであった、q-パンルヴェ方程式に対するモノドロミ（正確には接続係数）可解な解への研究へ一歩を踏み出した。

(3) **パンルヴェ方程式の漸近解析**
ここ 20 年来、混乱しているパンルヴェ方程式の漸近解析を徹底的に整理して、べき級数型の漸近解と楕円型の漸近解の各々について調べた。アブロビッツ・シーガー解など指数型の漸近展開もべき級数型の特殊ケースとして扱うことが出来る。特に、第５パンルヴェ方程式の楕円漸近解は、ブートルーはじめ先行する研究でも見過ごされていたが、初項だけは決定した。べき級数型については、すでに岩野の定理および 80 年代の高野・下村・吉田で収束が示されていたが、その後の研究の中で忘れ去られていたので、パンルヴェ方程式のべき級数型漸近解析のタイプを完全に分類することで、その収束がすべて高野・下村・吉田の結果に、ベックルント変換によって決定できることを示した。

(4) **モノドロミ非保存変形**
アルファン系の方程式について、不確定特異点を持つ場合のアルファン系の方程式が、モノドロミ非保存変形になることを示した。もともとのアルファン系が超幾何函数で解けるのに対して、退化系は同じように合流超幾何函数などで解ける。これらの方程式も、不確定特異点を持つ線型方程式のモノドロミ非保存変形として表される。

(5) **パンルヴェ方程式とカルタン幾何**
パンルヴェ方程式のパラメタがカルタンの射影微分幾何の不変量になることに注目して、特に特殊な形の２階の正規形微分方程式を座標変換して、第１パンルヴェ方程式になる条件などを求めた。この方法は、ガンビエの分類のある一部分を明示したものといえる。同様の手法によって、第 1、第 2, 第 4 パンルヴェ方程式に関しては、カルタンの（擬）不変量とパンルヴェ方程式との対応関係が決定できると期待している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　６件）


① Kazuo Kaneko and Yousuke Ohyama, Meromorphic Painleve transcendents at a fixed singularity, Mathematische Nachrichten, 査読有，(掲載確定) 2012.

②Yousuke Ohyama, Particular solutions of q-Painlevé equations and q-hypergeometric equations, Proceeding of International Conference ``Painleve Equations and Related Topics″, 査読無, 2011, 122-125.

③Yousuke Ohyama, Special Solutions to the Second q-Painleve Equation, AIP Conf. Proc., 査読有, **1281** (2010), 1714-1717.

④Yousuke Ohyama, Expansions on special solutions of the first q-Painleve equation around the infinity, Proc. Japan Acad., 査読有, **89**(2010) 91-92.

⑤ Yousuke Ohyama, Monodromy evolving deformations and Halphen's equation, CRM Proceedings and Lecture Notes, 査読有, **47** (2009), 343-348.

⑥ Yousuke Ohyama, Analytic solutions to the q-Painleve equations around the origin, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, **B12** (2009), 45-52.


〔学会発表〕（計 10　件）


①大山陽介,　Boutroux100: パンルヴェ方程式の漸近解析, 研究会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2012 年 3 月 16 日熊本大学

②大山陽介,　From Cartan to Painlevé：序章, 研究会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」, 2012 年 1 月 18 日鹿児島大学

③大山陽介,　Boutroux 100: Episode.0, 研究会「超幾何方程式研究会 2012」, 2012 年 01 月 06 日神戸大学

④大山陽介,　Painlevé 方程式の解析的特殊解, 研究会「微分方程式の総合的研究」,2011 年 11 月 9 日 東京大学

⑤ Yousuke Ohyama, Asymptotics of the Painlevé equations and Hukuhara's theorem,

「SISSA 数物セミナー」, 2011年11月9日 トリエステ・イタリア

⑥Yousuke Ohyama, Particular solutions of q-Painlevé equations and q-hypergeometric equations, 国際研究会「Painleve equations and related topics」, 2011年6月22日 オイラー研究所・ロシア

⑦Yousuke Ohyama, Degeneration scheme of basic hypergeometric equations and the q-Painleve equations, 国際研究会「Mini workshop on Classical Analysis in Tokyo」, 2011年2月18日東京都・東京大学数理科学研究科棟(駒場)

⑧Yousuke Ohyama, Special solutions of q-Painleve equations, 国際研究会「Journee Japon-France de l'equipe Equations fonctionnelles」, 2011年2月4日 フランス・ストラスブール

⑨Yousuke Ohyama, Special Solutions to the Second q-Painleve Equation, 国際研究会「International conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics」, 2010年9月24日 ギリシャ・ロードス

⑩Yousuke Ohyama, Analytic solutions to the Painleve equations around the origin, 国際研究会「Discrete Systems and Special Functions」, 2009年7月3日英国ニュートン研究所

６．研究組織

(1)研究代表者

大山　陽介　　(Ohyama Yousuke)
大阪大学・情報科学研究科・准教授
研究者番号：10221839

(2)連携研究者

坂井　秀隆　　(Sakai Hidetaka)
東京大学・数理科学研究科・准教授
研究者番号：50323465

木村　弘信　　(Kimura Hironobu)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：40161575

原岡　喜重　　(Haraoka Yoshishige)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：30208665

竹村　剛一　　(Takemura Koichi)
中央大学・理工学部・准教授
研究者番号：10326069

小池　達也　　(Koike Tatsuya)
神戸大学・理学研究科・准教授
研究者番号：80324599

眞野　智行　　(Mano Toshiyuki)
琉球大学・理学部・助教
研究者番号：60378594

川向　洋之　　(Kawamuko Hiroyuki)
三重大学・教育学部・准教授
研究者番号：00303719

菊地　哲也　　(Kikuchi Tetsuya)
青山学院大学・理工学部・非常勤講師
研究者番号：00374900