様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24 年　4 月　17 日現在

機関番号：３４４２８
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：　2009　～ 2011
課題番号：２１５４０２１８
研究課題名（和文）　ランダム平面分割における可積分構造と幾何学的構造

研究課題名（英文）　Integrability and geometry in random plane partitions

研究代表者
中津　了勇　（NAKATSU TOSHIO）
摂南大学・理工学部・准教授
研究者番号：10281502

研究成果の概要（和文）：近年の数理物理の進展に重要な役割を果たしている各種の幾何構造に関連する可積分系の問題を追及した。位相的弦理論や超対称ゲージ理論の厳密解に現れる組み合せ的・幾何学的構造について、ランダム平面分割における量子トーラス対称性と可積分構造（１次元戸田階層）の発見とそれらの相関、ランダム平面分割の熱力学極限(無分散極限)が満たす一般化弦方程式に関する理解などの成果が上がった。

研究成果の概要（英文）：We study integrable systems lying with geometorical structures that appear and play important roles in the recent progress of mathematical physics, in particular, gauge theories and string theories. Exact solutions for supersymmetric gauge theories and exact amplitudes of topological strings show that random partitions and random plane partitions reflect combinatorial and geometrical structures of these theories. We investigate the integrable structure (1-Toda hierarchy and its dispertion-less limit) of random plane partitions and its thermodynamic limit by utilizing quantum torus symmetry, giving the generalized string equation in a partial form. We also derive the semi-classical generalized string equation which describes the thermodynamic limit of random partitions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１１年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学、大域解析学
キーワード：可積分系、数理物理、ランダム平面分割、量子トーラス、戸田階層、
熱力学極限、超対称ゲージ理論、超弦理論

１．研究開始当初の背景

場の量子論は無限大自由度の協同現象を記述する枠組み・言語である。その豊かな内容の理解においては、数学的な議論が重要な意味を持ち、数理的考察により、物理学の深い理論が構成されてきた。同時に、場の量子論の経路積分を用いる発見的手法により、重要な数学的結論も得られている。３次元 Chern -Simons 理論と２次元共形場の理論が組み紐の不変量を与えることは余りに有名である。このような状況にあって、厳密に解ける場の量子論に内在する可積分構造と幾何学的構造を深く理解することはきわめて重要である。今回の研究は、超対称ゲージ理論の厳密

解、ミラー対称性、Gromov-Witten 不変量などに関連して数理物理の新たな研究対象になっているランダム平面分割に焦点を当て、その可積分構造と幾何学的構造を深く理解することに迫る。

ランダム平面分割は平面分割の確率モデルである。比較的古くから組合せ論の研究対象であった。非負整数の２次元的配列で、任意に１つの列もしくは段を固定したとき、そこに現れる配列が整数の「分割」(partition)となるものを「平面分割」(plane partition)と呼ぶ。２次元的配列を対角線に平行な半直線に切り分けて、「分割」達の列とみなすこともできる。 q, Q をともに実数の不定元とする。この確率モデルは実数の不定元 q 、Q をパラメタとする平面分割の数え上げの母関数と関係する。

超対称ゲージ理論の厳密解、ミラー対称性、Gromov-Witten 不変量との関連を手短にまとめておこう。不定元 q、Q をゲージ理論のパラメタで書き直せば、分配関数は５次元 U(1)理論の Nekrasov 関数と等しい。すなわち、インスタントン(反自己双対接続)のモジュライ空間上の Dirac 作用素の同変指数となる。同様の操作で、超弦理論においては、局所U(1)ジオメトリーと呼ばれる、３次元トーリック Calabi-Yau 多様体上の位相的弦の厳密振幅となる。Gromov-Witten プレポテンシャルの量子化と呼ぶべきものである。

さらに、可積分系とのつながりも見出されている。中津と高崎は、ランダム平面分割における可積分構造として、１次元戸田階層を得ている。 主対角の分割に新たに無限個の結合定数(時間変数)を許すポテンシャルを導入する。このポテンシャルはゲージ理論のループ演算子(ホロノミー演算子)を生成する。こうして得られる外部ポテンシャル中のランダム平面分割の分配関数は、１次元戸田階層のτ関数を与える。その可積分性の鍵は、中津と高崎が見出したランダム平面分割における量子トーラス対称性にあると予想できる。

他方、ランダム平面分割における幾何学的構造は、平面分割の巨視的挙動(漸近挙動、熱力学的挙動)に関わるものである。平面分割は立体ヤング図形に視覚化できる。立体ヤング図形の巨視的形状(limit shape)が、平面分割の漸近挙動の視覚化である。この巨視的形状は 5 次元 U(1)理論の Seiberg-Witten 曲線、Seiberg-Witten 微分と関係している。

２．研究の目的

この研究の方向は、ランダム平面分割における可積分構造と幾何学的構造について、既に同定されている量子トーラス対称性などを用いて、そのさらなる理解と応用を現実的に追求することである。従来の可積分系研究で論じられてこなかったランダム平面分割を題材に、可積分系と数理物理の新たな関連を探る。量子トーラス対称性は、ゲージ理論や超弦理論の厳密解に現れる対称性でもある。我々の研究には、 組合せ論の限定的な問題の定式化を超えて、インスタントンのモジュライ空間や Calabi-Yau 多様体のミラー対称性への応用を持つという特徴もある。具体的な目標の詳細を挙げる。

(1)ランダム平面分割の分配関数が従う付加条件を求めること。特に、その明示的な式(弦方程式)を与えること。分配関数は、1 次元戸田階層の特殊解である。 特殊解の従う付加条件は、量子トーラス Lie 代数の構造を反映したものとなる。

(2)ランダム平面分割の可積分構造を U(N)理論まで包含する形式に拡張すること。既に得ている無限格子上の戸田階層の特殊解(U(1)理論の拡張)の理解を進めるとともに、U(N)ゲージ理論の Nekrasov 関数のランダム平面分割からの導出、量子トーラス対称性との関連を調べる。得られる可積分構造として、変形ＫＰ階層の N-簡約(A型 Drinfeld-Sokolov 階層の一種)などを予想している。

(3)分配関数の満たす可積分性と付加条件の整合性から、Seiberg-Witten 曲線の量子化の可能性を探る。古典論の Seiberg-Witten 曲線は、無分散極限における整合性が規定すると考えられる。量子化されたリーマン面の自然な概念を、量子論における整合性に求めるのは自然であろう。Calabi-Yau 多様体上の超弦理論への応用も念頭に置く。

(4)ランダム平面分割の無限粒子系への応用。平面分割から得られる整数分割の列は離散時間発展する分割の生成・消滅の歴史とみなせる。ランダム平面分割は分割の生成・消滅過程である. 1 次元排他過程や界面成長模型への応用等を考察する.

３．研究の方法

研究課題の中心部分(1)-(3)のうち、ランダム平面分割の可積分構造に関する(1)(2)は、研究代表者の中津が研究分担者の高崎金久教授(京都大学人間環境学研究科)と、過去の共同研究の延長として取り組んだ。中津と高崎は過去１５年近く研究交流の実績があり、弦理論とゲージ理論に現れる可積分構造に関する１０編以上の共著論文がある。外部ポテンシャルを入れて拡張した U(1)理論の N-簡約の構成、特殊解を特徴付ける拘束条件の

確定などを目指した。 月に２-３回不定期に相手の研究室(摂南大・京大)を訪れて大まかな基礎を論じ合い、e-メール・電話で細部を討論した。また、海外研究者(A.Marshakov 教授(ITEP、ロシア)、村瀬元彦教授(UC Davis、米国))との情報交換を行った。幾何学的構造に関する(3)は、より基本的な(1)、(2)の研究に連動させる。当面は中津が単独で進めるが、研究の進行状況に応じて高崎が加わる予定であった。(4)の無限粒子系への応用は中津・高崎の共同で進めるが、最初は基本的な技法を学ぶことに徹した。ランダム平面分割が記述する生成・消滅過程は Schur 過程と呼ばれる確率過程の一例である。中津、高崎ともに、Schur 過程について基本的なことは理解している。

４．研究成果

主な目的は、超対称ゲージ理論や超弦理論などに関連して数理物理の新たな研究対象になっているランダム平面分割における可積分構造と幾何学的構造の理解と応用である。現在までに、ランダム平面分割とランダム分割の熱力学極限を決める Riemann-Hilbert 問題の計算方法の確立、 無分散１次元戸田階層の解としてランダム分割の熱力学極限を決定する一般化弦方程式の発見、１次元戸田階層のτ関数であるランダム平面分割の分配関数ならびに熱力学極限(無分散極限)が満たす一般化弦方程式に関する理解、分配関数の双対関係式の発見、球面の Hurwitz 数とその q 類似の母函数が満たす一般化弦方程式等々、多くの成果が上がった。

(1)Schur 過程における分割の転送行列、転送行列の量子トーラスへの随伴作用(シフト対称性)等を用いることにより、２次元戸田階層のτ関数の標準的な表示(上野-高崎、武部によるフェルミオン表示)が得られ、特殊解を定める無限次元 Clifford 群の元が明示できる。この明示式を用いることで、特殊解を定める Clifford 群の元と量子トーラスの間の関係式を確かめることができる。これから２次元戸田階層の２系列の時間発展を記述する Lax 作用素と Orlov-Schulman 作用素の間に成り立つ関係式を導き、２次元戸田階層の Lax 表示による特殊解の特徴付けを試みた。

同じ関係式をランダム歪平面分割の分配関数も満たし、特殊解を完全に決定する一般化弦方程式として不十分であることが判明した。この関係式を満たす戸田階層の解空間の構造を調べ、特殊解の拘束条件を考察することは今後の課題である。

(2)(1)に関連して、特殊解の可積分構造が、１次元戸田階層を２層に重ねたエキゾチックな可積分構造である可能性を認識した。外部ポテンシャルは量子トーラスの生成子 V の正冪の和の形だが、さらに可積分性を保って V の負冪項まで加えた拡張が可能である。V の負冪項はゲージ理論の文脈では逆向きのループ演算子(ホロノミー演算子)に対応している。このように拡張したランダム平面分割の分配関数は、従来の時間変数 t に加えて、V の負冪に関する時間変数 t’についても １次元戸田階層のτ関数であると予想している。さらに、分配関数は Q の適当なスケール変換を伴う２種類の時間変数 t、t’の対合で不変になることも見出している。双対性と可積分構造の関連を追及することは、今後の課題の一つである。

(3) Lax 作用素ならびに Orlov-Schulman 作用素の半古典極限に相当する Lax 関数、Orlov-Schulman 関数の関係式によって、熱力学極限の無分散１次元戸田階層の特殊解を特徴付けることを試みた。半古典極限で成り立っているこの関係式は、拡大 Seiberg-Witten 微分が、２次元シリンダーの双方向の無限遠のうち、その１つの無限遠点で満たす境界条件が導く代数方程式と等価であることを示した。U(1)理論の Seiberg-Witten 曲線の２つのパラメタは、 これともう一つの無限遠点の境界条件が導く代数方程式を合わせて、t、s の陰関数として定まる。２つの境界条件を無分散可積分系の視点で検討し、特殊解の完全な特徴付けを行うことは今後の課題である。

この研究の方向では、ランダム分割における可積分構造と対称性も興味深い。外部ポテンシャルを導入したランダム分割の分配関数は１次元戸田階層のτ関数となる。これは、球面の Gromov-Witten 不変量の母関数、4 次元ゲージ理論の高次カシミア演算子の相関関数の母関数といった意味がある。熱力学極限は無分散１次元戸田階層の特殊解である。特殊解を決定する無分散可積分系の一般化弦方程式を発見的手法で見出した。ランダム平面分割の場合と異なる状況になっている。古典的一般化弦方程式の量子化の視点から、ランダム分割の分配関数を捉え直し、その対称性を探ることは興味深い問題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計　７件)

① <u>高崎金久</u>、<u>中津了勇</u>、``Thermodynamic limit of random partitions and dispertionless Toda hierarchy,” J. of Phys. A: Math.

Theor.、 査読有、Vol 45、2012、025403、
doi:10.1088/1751-8113/45/2/025403

② 高崎金久、
``Generalized string equation for double Hurwitz numbers,”
Journal of Geometry and Physics,
査読有、Vol 62、2012、1135-1156、
http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2011.12.005

③ 中津了勇、高崎金久、
``Integrable structure of melting crystal model with external potentials,”
Adv. Studies in Pure. Math.、
査読有、Vol 59、2010, 201-223

〔学会発表〕（計 6件）

① 高崎金久、
``Generalized string equations for Hurwitz numbers,” 「可積分系，ランダム行列，代数幾何と幾何学的不変量」、2010年12月15日～17日、京都大学人間環境学研究科

② 中津了勇、
``Toda tau functions and quantum torus,” in ``Synthesis of Integrabilities arising from gauge-string duality” 2010年9月20日～25日、ステクロフ数学研究所(モスクワ，ロシア)

③ 高崎金久、
「フルヴィッツ数に関連する戸田階層の特殊解とその古典極限」
日本数学会2010年秋季総合分科会,2010年9月22日～25日名古屋大学

④ 高崎金久、
``Toda tau function with quantum torus symmetries,” in 19th International Colloquium ``Integrable Systems and Quantum Symmetries’’ 2010年6月17日～19日、チェコ工科大学（プラハ、チェコ）

⑤ 高崎金久、
「溶解結晶模型の可積分構造」、
日本数学会2010年年会、2010年3月24日～27日　慶應義塾大学

〔図書〕（計 0件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
　中津　了勇（NAKATSU TOSHIO）
　摂南大学・理工学部・准教授
　研究者番号：10281502

(2)研究分担者
　高崎　金久（TAKASAKI　KANEHISA）
　京都大学・人間環境学研究科・教授
　研究者番号：40171433

(3)連携研究者
　なし　　　（　　）
　研究者番号：