

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 4月 30日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540219

研究課題名（和文） 非線形楕円型固有値問題の漸近解析と逆問題

研究課題名（英文） Asymptotic analysis and inverse problems of the nonlinear elliptic eigenvalue problems

研究代表者

柴田 徹太郎（SHIBATA TETSUTARO）

広島大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：90216010

研究成果の概要（和文）：本研究では、非線形楕円型方程式の固有値や固有関数の漸近的性質を詳細に解析し、そこから派生する逆問題を考察した。その結果、さまざまなタイプの非線形項を含む方程式の大域的、局所的分岐構造を明らかにした。逆問題に関しては、ロジスティックタイプの方程式の分岐曲線の逆問題を中心に考察した。これに関して、常微分方程式論的アプローチと漸近展開の公式を援用することにより、分岐曲線の漸近的性質から、未知の非線形項を決定することに成功した。

研究成果の概要（英文）：In this study, we investigated the precise asymptotic properties of the eigenfunctions and eigenvalues of nonlinear elliptic equations, and studied the inverse eigenvalue problems associated with the direct problems. We clarify the global and local structures of the bifurcation curves for the equations with several types of nonlinear terms. As for inverse problems, we mainly studied the inverse bifurcation problems for logistic type equations. By using the theory of ordinary differential equations and the asymptotic expansion formulas for bifurcation curves, we determined the unknown nonlinear terms by the asymptotic behaviors of the bifurcation curves.

交付決定額

（金額単位：円）

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2009年度 | 900,000   | 270,000 | 1,170,000 |
| 2010年度 | 800,000   | 240,000 | 1,040,000 |
| 2011年度 | 800,000   | 240,000 | 1,040,000 |
| 2012年度 | 800,000   | 240,000 | 1,040,000 |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 3,300,000 | 990,000 | 4,290,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式論、固有値、漸近解析、変分法、逆問題

## 1. 研究開始当初の背景

（1）非線形楕円方程式の固有値問題は、物理学、生物学的、工学的に動機づけられた重要な数学的研究対象である。これまでは、分岐問題に関しては、出現する分岐曲線の局所的解析が主流であったが、考察する問題を

非線形固有値問題としてとらえ、分岐曲線をルベーフ空間のときに考察し、その大域的挙動を解析した手法が開発された。この変分法的着眼は画期的であり、様々なノルムに関する詳細な漸近解析、漸近展開の公式が確立されつつあった。

(2) 非線形固有値問題に関しては、線形問題と異なり、分岐曲線から方程式の非線形項を決定する逆問題的視点からの研究は非常に少なく、ある特殊な条件化での研究があるのみであった。研究代表者は(1)の研究に関連し、分岐曲線の漸近挙動から未知の非線形項を決定するという斬新な研究テーマを提唱していた。

(3) ① 2つのパラメーターを含む問題に対しては、ラグランジュの未定乗数法を用いて変分固有値を定義し、その漸近的性質を調べるという画期的な変分法的枠組みが導入されていた。この枠組みにより、漸近的に内部遷移層が現れるような解、すなわち階段の形状をした解をとらえる変分法の枠組みが存在することが示されていた。

② 単振り子タイプの2パラメーター問題については、1つの固有値パラメーターを含む問題には決して出現しないタイプの境界層をもつ解が現れることが示されていた。さらに、その境界層の詳細な漸近公式も確立されていた。

## 2. 研究の目的

本研究の具体的な研究目的は、以下の4つの項目に取り組むことであった。

(1) 1つの固有値パラメーターを含む常微分方程式の固有値問題については以下の通りである。

① ロジスティック方程式、単振り子の方程式のような、生物学的、物理学的背景を持つ方程式に関して、解や分岐曲線の指数関数的剰余項をふくんだ完璧な漸近挙動の公式の確立

② 非線形項の主要項が  $p$  べきタイプであるものに対して、非線形項に弱い摂動を加えたとき、その摂動を反映した、詳細な漸近展開公式の確立

(2) 1つの固有値パラメーターを含む非線形楕円型偏微分方程式問題に関しては、パラメーターが非常に大きいときの解の振舞いが、考察する領域の幾何学的性質などに依存することが判明したので、本研究では様々な領域に関して解の境界付近での振舞いを中心に考察することとした。

(3) 分岐曲線の逆問題的考察に関しては、(1)で確立した分岐曲線に関する漸近展開公式を逆問題的視点から考察することを目標とした。具体的には、以下の3項目に取り組むこととした。

① 非線形方程式の分岐曲線の大域的挙動による、その方程式に含まれる未知の非線形項の特定とその安定性

② 取り扱う方程式にふさわしい逆問題としてのセッティングの考察

③ 分岐曲線と非線形項が1対1対応であるための十分条件の考察

以上、まったく新しい視点からの逆問題の考察について、今後の非線形固有値問題の逆問題に関する研究の基礎となる基本的な結果を確立することを目標とした。

(4) 2つのパラメーターの問題に関しては、考察する方程式に応じて適切な変分法の枠組みを設定することにより、さらに興味深い固有値、固有関数の漸近挙動を考察することを目標とした。

## 3. 研究の方法

### (1) 各連携研究者の役割

研究目的に対応して、各連携研究者の役割分担を以下のようにした。

研究目的(1): 柴田が担当

研究目的(2): 柴田、倉田が担当

研究目的(3): 柴田、坂口が担当

研究目的(4): 柴田、田中が担当

(2) 数学の研究においては研究打ち合わせや情報収集活動が重要である。そこで、本件の研究経費の多くを旅費に費やした。具体的に行った研究方法は以下の通りである。

① 国際会議での成果発表および国外専門家との討論・情報交換、国内研究集会における成果発表および国内研究者との情報交換

② 広島大学工学部で開催された研究集会「広島応用解析セミナー」を利用した研究代表者と連携研究者、国内の専門家と情報交換

③ 研究代表者と連携研究者との緊密な研究打ち合わせ

④ 定期的におこなう研究代表者と連携研究者とのセミナー

⑤ 研究代表者による、上記4項目で得られた研究目的に対する効果的な手法・技術・結果の統合

### (3) 資料等の購入

① 最新の関連分野の研究について、本研究との関連性の深度や数学的テクニックの応

用可能性を議論・討論するためにセミナーを行った。

② 文具やコンピューター関連の消耗品等を購入し、研究成果や資料の整理を行った。

#### 4. 研究成果

研究成果の概要を、研究の目的の欄であげた項目の順に記述する。

(1) ① 1つの固有値パラメーターを含む常微分方程式の固有値問題については、ロジスティック方程式の分岐曲線の局所的な挙動について、常微分方程式論的アプローチにより漸近展開の公式を確立することに成功した。この手法は、1次元のシュレディンガー方程式の定常解の局所的な分岐構造に関する詳細な漸近展開公式の確立に応用可能であることも明らかにした。

② 単振り子の方程式が摩擦項を反映した非線形項をふくむような場合に関して、常微分方程式論的アプローチにより詳細な漸近挙動の公式を確立することに成功した。このことにより、摩擦項を含む単振り子の方程式の解と、理想的状態における単振り子の方程式の解の漸近挙動の違いを明らかにすることができた。

③ 1つの固有値パラメーターを含む常微分方程式の固有値問題について、非線形項に正弦関数を含む方程式の分岐曲線の局所的・大域的漸近挙動を考察した。これまでの研究においては、非線形項が単調増加関数の場合を中心に解析してきたが、今回の研究において、正弦関数は振動する、という特徴的な性質が分岐曲線の大域的挙動に大きな影響を与えることを明らかにした。

(2) 非線形楕円型方程式に関しては、方程式を考える領域が有界かつ適度になめらかである場合に、非線形項が単調増加であるという範疇の中で逆問題に関連する基礎的な結果を得た。

(3) (1) で確立した解の分岐曲線に関する漸近展開公式を逆問題的視点から深く考察した。具体的には、非線形方程式の分岐曲線の大域的な振る舞いから、その方程式に含まれる非線形項をどのような精度で特定できるか、また再構成の可能性など、今後の逆分岐問題の研究の基礎となる、以下の基本的な結果を確立した。

① ロジスティックタイプの方程式の分岐曲線の逆問題を考察した。これまで逆分岐問題については先行研究が少なく、非線形項が有

界な場合にのみ研究が行われてきた。ロジスティック方程式はきれいな分岐構造をもつモデル方程式としてよく知られているが、この方程式を逆問題の関連から考察することは、生物の個体密度とすみやすさの関係を解明するという観点から重要な問題である。これに関して、常微分方程式論的アプローチと漸近展開の公式を援用することにより、分岐曲線の漸近的性質から、未知の非線形項を決定することに成功した。

② 未知の非線形項があるクラスに属するという条件のもと、分岐曲線と非線形項は1対1対応であることを証明した。

③ 未知の非線形項が、べき乗の関数の摂動であるという条件のもと、常微分方程式論的アプローチと順問題に関する漸近展開の公式を援用することにより、分岐曲線の大域的な挙動の情報から、未知の非線形項を決定することに成功した。

(4) 2つの固有値パラメーターを含む常微分方程式の固有値問題について、ロジスティック方程式と関連するような、生物学的背景を持つ方程式の解析が重要な研究課題である。これに関して、1つのパラメーターを含む問題の分岐曲線の局所的構造の詳細な漸近解析を応用することにより、2つのパラメーターどうしの漸近的関係を与える公式を確立することに成功した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9件)

① Tetsutaro Shibata, Asymptotic approach to inverse bifurcation problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, *Advanced Nonlinear Studies* 12 (2012), 465-479, 査読有.

② Tetsutaro Shibata, Critical exponents of the asymptotic formulas for two-parameter variational eigencurves, *Differential and Integral Equations* 25 (2012), 899-914, 査読有.

③ Tetsutaro Shibata, Asymptotic Behavior of Bifurcation curve for Sine-Gordon-Type Differential Equation, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012 (2012), Article ID 753857, 16 pages, 査読有. DOI: 10.1155/2012/753857

④ Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation

problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, Inverse Problems 27 (2011), 055003, 12pp, 査読有.

DOI: 10.1088/0266-5611/27/5/055003

⑤ Tetsutaro Shibata, Local structure of bifurcation curves for nonlinear Sturm-Liouville problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications 369 (2010), 583-594, 査読有.

DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.03.060

⑥ Tetsutaro Shibata, Precise asymptotics of boundary layers for damped simple pendulum equations, Results in Mathematics 58 (2010), 105-118, 査読有.

DOI: 10.1007/s00025-009-0009-5

⑦ Tetsutaro Shibata, Precise asymptotic behavior of solutions to damped simple pendulum equations, Electronic Journal of Differential Equations 2009, No. 142. (2009), 1-15, 査読有.

⑧ Tetsutaro Shibata, Inverse eigenvalue problems for semilinear elliptic equations, Electronic Journal of Differential Equations 2009, No.107. (2009), 1-11, 査読有.

⑨ Tetsutaro Shibata, Spectral asymptotics for inverse nonlinear Sturm-Liouville problems, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 58. (2009), 1-18, 査読有.

[学会発表] (計 8件)

① Tetsutaro Shibata, Global behavior of bifurcation curves for a class of boundary value problems, 第5回名古屋微分方程式研究集会、2013年3月12日、名古屋大学大学院多元数理科学研究科

② Tetsutaro Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for nonlinear elliptic equations, 第30回九州における偏微分方程式研究集会、2013年1月29日、福岡大学

③ Tetsutaro Shibata, Global behavior of bifurcation curve for a class of boundary value problems, International Workshop on Stationary Problems in Nonlinear Partial Differential Equations、2013年1月24日、佐賀大学理工学部数理科学科

④ Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems for non-autonomous semilinear Sturm-Liouville equations, 第10回浜松偏微分方程式研究集会、2012年12月18日、静岡大学工学部

⑤ Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems for non-autonomous semilinear Sturm-Liouville equations, 偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究、2012年11月20日、京都大学数理解析研究所

⑥ Tetsutaro Shibata, Local behavior of bifurcation curve for nonlinear Sturm-Liouville problems, 11 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2011年6月22日、Pusan National University, Pusan, Korea

⑦ Tetsutaro Shibata, Direct and inverse bifurcation problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, 新しい視点からの現象解析と関数方程式、2010年11月10日、京都大学数理解析研究所

⑧ Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of solutions to nonlinear elliptic eigenvalue problems, 1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 2009年6月19日、東北大学大学院理学研究科

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

柴田 徹太郎 (SHIBATA TETSUTARO)  
広島大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：90216010

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

坂口 茂 (SAKAGUCHI SHIGERU)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：50215620

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：20188288

倉田 和浩 (KURATA KAZUHIRO)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10186489