様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　４月　２９日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540229
研究課題名（和文）　反応拡散方程式系と関連する非線形問題の解析

研究課題名（英文）　Analysis of Reaction-Diffusion Systems and Related Nonlinear Problems

研究代表者
山田　義雄（ YAMADA　YOSHIO ）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20111825

研究成果の概要（和文）：本研究においては、数理生態学分野に登場する 2 種の競合生物の棲み分け現象や新種の侵入現象などに現れる､種の非均質性の様子を数学的に定式化して考える。このような問題は生物種の個体数密度を未知関数とする反応拡散方程式として表わされる。非線形拡散を伴う 2 種生物モデルに対する正値定常解集合の構造、および生物の侵入をモデルとする自由境界問題に対する展開の成功と絶滅のメカニズムについて、満足できる成果が得られた。

研究成果の概要（英文）：This research project is concerned with the mathematical formulation of non-uniformity of species in mathematical ecology such as the segregation of two competing species and the spreading of invasive species. These phenomena are described by reaction-diffusion equations with population densities as unknown functions. We have obtained satisfactory results on the structure of positive steady-states for two-species models with nonlinear diffusion and the mechanism of spreading and vanishing for free boundary problems in invasion models.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：大域解析学
キーワード：非線形現象、反応拡散方程式、非線形拡散、自由境界問題、数理生態学

１．研究開始当初の背景

物理学、化学反応、数理生態学などの分野で観測される現象のなかには、密度や濃度の濃淡の違いにより、色々な縞模様のパターンとなって現れるものが多い。このような現象を微分方程式の形に記述すると**反応拡散方**

程式系として数理モデル化されることが多い。また、反応拡散方程式系に対する数値シミュレーションを施すと、ダイナミクスの激変を伴う分岐、振動、パターンの形成や界面生成などのような、時間空間的な非一様性を伴う非線形現象が観測される。しかし、これらの現象が引き起こされるメカニズムについて理論的な解明がなされているとは言い難い。なぜ非線形現象がおこるのか、現象が推移する過程はどのようになるか、などの疑問に対して、数理科学の問題として理論的に解明することは、数学のみならず、応用数理科学の観点からも非常に重要なテーマである。しかし、現状は個別の現象について理論的なアプローチが開始されたにすぎない。

本研究では反応拡散方程式やそのシステムで記述される現象に登場する、パターンや界面の生成に代表される、**空間的な非一様性**に焦点を当てた。非線形拡散方程式の解における、空間的非一様性の発生メカニズムとその推移する過程の様子を理論的に明らかにすることを目指した。研究対象として当初考えていた反応拡散方程式系は

(a) 非線形拡散を伴うロトカ・ボルテラ型の反応拡散方程式系

(b) 微小な拡散係数を持つ相転移現象を記述する方程式

である。(a)の方程式は数理生態学に現れ、種の棲み分けが空間的な非一様性を伴う正値解に対応し、(b)の方程式では相の変化域が遷移層に対応している。これらの方程式について、解の形状（プロファイル）とモデルとする現象の対応を考えると、空間的な非一様性の形成・発展のメカニズムを解析することは非常に興味深い問題である。しかし、解析のための統一的な理論、アイデア、技法はまだ確立されていないのが実情であった。

２．研究の目的

当研究においては、反応拡散方程式の解が持つ、空間的非一様性の発生・生成のメカニズムを理論的に明らかにすることを目指す。扱う反応拡散方程式の代表的なものとしては、数理生態学に現れる

$$u_t = \Delta[(1+\alpha(u,v))u] + uf(u,v),$$
$$v_t = \Delta[(1+\beta(u,v))v] + vg(u,v),$$

の形のシステムが挙げられる。これは 2 種類の生物の生存競争競争を扱う、ロトカ・ボルテラ型の競合モデルと呼ばれる反応拡散方程式系である。生物の棲み分け現象を記述するために，1979 年重定-川崎-寺本により提案されたものであり、u,v はそれぞれ競合種の個体数密度を表す。数値シミュレーションでは、興味深い棲み分け現象が得られるため、多くの数学者の興味を引きつけている。このシステムについて主たる問題は、非定常問題の大域解をどのように構成するか、定常問題の解集合はどのようになっているか、などの疑問に答えることである。しかしこれらの疑問点の解決にはほど遠いのが現状である。

当面の，最も重要な方程式系は上のシステムにおいて

$$\alpha(u,v) = \alpha v + \gamma u,\ \beta(u,v) = \beta u + \delta v,$$
$$f(u,v) = a - u - cv,$$
$$g(u,v) = b - du - v,$$

とおいた SKT モデルである。ここに登場する係数はすべて非負または正定数である。特に、α,β は**交差拡散係数**と呼ばれ、種の棲み分けをもたらす重要なパラメータである。このモデルの定常問題について、正値解が 2 種の共存解に対応している。正値解についてどんな条件の下で存在するか、またその解の個数、形状、安定性についてどんなことがわかるか、交差拡散の影響はどこに現れるか、などの問題を考えることが重要である。解の存在条件については、同次ノイマン条件のもとで Lou-Ni (1996, 1999) により一定の成果が得られているが、完全ではない。また、同次ディリクレ条件の下では Yamada (2008)により、正値解の存在定理が得られている。しかし、解のプロファイル、安定性などの定性的性質は未解明のままであり、正値解集合の構造を求めるための新しいアプローチを開発する必要がある。

３．研究の方法

上述の SKT モデルに代表される非線形拡散を伴う反応拡散方程式の定常問題を解析するための一般的な理論・手法は確立されていない。分岐理論、写像度理論などの関数解析の手法により、解の存在などの最小限の結果は得られている。しかし、解の形状、個数、安定性などのように、より高いレベルの成果を得るためには、新しい理論・アイデア・技法の開発が必要となる。

（１）研究の役割分担

上述の状況を踏まえ、研究代表者、連携研究者は次のような役割分担を行った。

①非線形放物型方程式の研究を山田、大谷、竹内が分担、非線形楕円型方程式の研究を山田、大谷、田中、廣瀬、大屋が分担し、山田が研究の統括をした。

②応用解析の立場から、大谷、中島、久藤、若狭が協力し、必要な理論・道具・技法の開発・研究にあたった。

③反応拡散方程式の解の定性を調べるためのアイデア・技法の研究を久藤、中島、若狭、佐藤、大枝が担当した。

④定常問題の変分法の立場からの研究協力を田中、大谷、大屋が行った。

⑤パターンの形成、界面の生成など解の挙動を調べるために必要な数値シミュレーションを若狭、大学院生たちの研究協力により行

った。

（２）成果の発表と研究交流

研究代表者、連携研究者は学会の他、本研究に関連するテーマで開催される国際会議（The 6th European Confernce on Elliptic and Parabolic Problems（2009 年イタリア）, 日独２国間セミナー（2009 年ドイツおよび 2012 年日本）など)、研究集会、シンポジウムに参加、成果発表や研究討論を通して研究交流を行った。数学分野では、このような研究者間の直接のコミュニケ―ションにより重要なアイデアが生れる、別の視点から問題を見つめなおすことで新展開が得られる、などのメリットがある。本研究においても、海外との研究者との交流の幅が拡がり、今後の共同研究の道を拓くことができた。

４．研究成果

反応拡散方程式の解が提供する空間的非一様性に焦点を絞った研究を行った。空間パターンや界面を方程式自身が内包しているようなモデルのうちで成果を挙げられたのが、数理生態学分野に登場する、非線形拡散（交差拡散）を伴う競合モデル（SKT モデル）である。また、界面の運動が自由境界として明示されている自由境界問題についても 2010 年秋から取り組み、一定の成果を上げることができた。

（1）交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ型競合モデルに対する定常問題の研究

同一の領域において生存競争する２種の生物の個体数密度を u,v とする。自然界において生物の拡散現象を議論するとき、通常のランダムな拡散に加え、競合する種の少ない地点への拡散効果を考えるのが自然であるというアイデアの下、1979 年次のようなモデル(SKT モデル)が提起された：

$$u_t = \Delta[(1+\alpha v)u] + u(a-u-cv),$$
$$v_t = \Delta[(1+\beta u)v] + v(b-du-v).$$

ここに現れる係数はすべて非負または正の定数である。本研究で成果を挙げられたのは対応する定常問題の解析である。同次ディリクレ境界条件の下で

$$\Delta[(1+\alpha v)u] + u(a-u-cv) = 0,$$
$$\Delta[(1+\beta u)v] + v(b-du-v) = 0,$$

を考える。本研究の開始時点で知られていた結果は、正値解の存在のための十分条件のみで、解の形状などの詳しい情報に乏しかった。そこで交差拡散 α, β がどのような影響をもたらすかを調べるために、これらの係数を無限大とすることにより、正の定常解の極限関数がみたす極限問題を導き、この問題の解析から本来の問題の情報を得る、というのが基本アイデアである。主な成果は次の通りである。

①SKT モデルの正値定常解について、交差拡散係数に無関係なアプリオリ評価が成立する。とくに、この評価は任意の空間次元の下で成立する。

②交差拡散の係数について、$\alpha=0$, $\beta\to\infty$ とするとき SKT モデルの正値定常解 u,v について $(\beta u,v)\to(w^*,v^*)$ が成り立ち、(w^*,v^*) は次の問題の正値解である：

$$\Delta w^* + w^*(a-cv^*) = 0,$$
$$\Delta[(1+w^*)v^*] + v^*(b-v^*) = 0.$$

③上の極限問題は正値解を少なく一つもつ。

これらの結果において、②の極限問題の候補は２つあるものの、一方のみが実現されることがわかった。この結果は、同次ノイマン境界条件の場合に、Lou-Ni (1999)によって得られている結果と大きく異なる点である。したがって、一方のみの交差拡散の影響が大きいときには、同次ディリクレ条件のもとでは、棲み分け現象が起こらないことがわかる。

今後は、SKT モデルの空間パターン研究という観点からは、同次ノイマン境界条件のもとでの定常問題の研究が重要になると思われる。

（2）生物の侵入モデルに対する自由境界問題の研究

生物の侵入問題の定式化について、従来は反応拡散方程式に対する進行波解として捉えることが通常のアプローチであった。これに対して、2010 年 Du-Lin は反応拡散方程式に対する自由境界問題としてモデル化を行い、種の展開（spreading）と絶滅(vanishing)に関する興味深い結果を導いた。

研究代表者は 1980 年代後半に自由境界問題を研究しており、Du-Lin の研究にも触発され、2010 年秋から、生物の侵入をモデルとする自由境界問題の研究に再度取り組み始めた。１次元の問題として定式化するとき、侵入生物の棲息領域が固定境界 $x=0$ と自由境界 $x=h(t)$ によって囲まれているものとする。さらに領域 $0<x<h(t)$ において種の個体数密度 u は

$$u_t = du_{xx} + uf(u),$$

および $u(t,0)=u(t,h(t))=0$ をみたすとする。またステファン型の自由境界条件

$$h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)),$$

を課し、初期条件を与えたときに未知関数の組 $(u(x,t),\ h(t))$ を求めることが自由境界問題である。ここで最も重要な課題は

「自由境界問題の解 $(u(x,t),h(t))$ の $t\to\infty$ での挙動を決定せよ」

に答えることである。

自由境界問題の解 (u,h) について、**展開に成功する**(spreading)とは $t\to\infty$ とともに自由境界が∞になるとともに、$u(x,t)$ が正値にとどまることと定義し、**絶滅する**(vanishing)

とは、$t\to\infty$ とともに $u(x,t)$ が 0 に収束することと定義する。このとき展開の成功、絶滅がどのようなメカニズムで起きるかを明らかにすることを目指した。

成果の第１段階では、解の存在などの基本的結果に加え、自由境界問題について比較定理が成立すること、および、$h'(t)$ の積分を含むエネルギー等式の成立することの２つの重要な結果を確立することに成功した。

第２段階として自由境界問題の解の挙動について以下の結果が得られた。

①どんなに時間がたっても自由境界が有限にとどまれば種は絶滅する。

②種の展開成功については定常問題

$$du_{xx}+uf(u)=0, \quad 0<x<\ell,$$

の正値解 ϕ が深く関わる。特に (ϕ,ℓ) を初期値とすれば、解は展開に成功し、$t\to\infty$ とともに $u(x,t)$ は

$$du_{xx}+uf(u)=0, \quad x>0,$$

の正値解に収束する。

注意すべき点はこれらの結果が一般的な関数 f に対して成立することである。さらに重要な代表的関数である、ロジスティック型

$$uf(u)=u(a-bu),$$

および双安定型

$$uf(u)=u(u-c)(1-u), \quad 0<c<1/2,$$

に対しては次の二者択一定理を証明することに成功している。

③$uf(u)$ はロジスティック型、あるいは双安定型とする。このとき自由境界問題の任意の解について、展開に成功するか、絶滅のいずれか一方が成立する。

④種の展開に成功するための十分条件、絶滅のための十分条件を初期値について与えることができる。

侵入モデルの自由境界問題については、研究が始まったに過ぎない。多次元領域での自由境界問題、複数の種が関わる自由境界問題など、数学的にも応用数理の観点からも重要な問題が多い。次の研究テーマとしては、反応拡散方程式に関わる自由境界問題に焦点を当てたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 23 件）

①Kousuke Kuto and Yoshio Yamada: On limit systems for some population models with cross-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 発表予定，査読有.

②Evangelos Latos, Takashi Suzuki and Yoshio Yamada: Transient and asymptotic dynamics of a prey-predator system with diffusion, Mathematical Methods in Applied Sciences, 発表予定，査読有.

③山田義雄：交差拡散を伴う非線形拡散方程式系－数理生態学に現れる反応拡散方程式系，数学，第 64 巻 3 号（2012）予定，査読有.

④ Fang Li and Kimie Nakashima: Transition layers for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation in multi-dimensional domains, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 32 (2012), No. 4, pp. 1391-1420, 査読有.

⑤Shingo Takeuchi: Generalized Jacobian elliptic functions and their application to bifurcation problems associated with p-Laplacian, J. Math. Anal. Appl., Vol. 385 (2012), No.1, pp.24-35, 査読有.

⑥Yuki Kaneko and Yoshio Yamada: A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in ecology, Adv. Math. Sci. Appl., Vol. 21 (2011), No.2, 印刷中，査読有.

⑦Messoud A. Efendiev and Mitsuharu Ôtani: Infinite-dimensional attractors for parabolic equations with p-Laplacian in heterogeneous medium, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Vol. 28 (2011), No.4, pp. 565-582, 査読有.

⑧Norihisa Ikoma and Kazunaga Tanaka: A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol. 40 (2011), No.3-4, pp. 449-480, 査読有.

⑨Shingo Takeuchi: Coincidence sets in quasilinear elliptic problems of monostable type, J. Differential Equations, Vol. 251 (2011), No. 8, pp. 2196-2208, 査読有.

⑩Kazuhiro Oeda: Effect of cross-diffusion on the stationary problem for a prey-predator model with a protection zone, J. Differential Equations, Vol. 250 (2011), No.10, pp. 3988-4009, 査読有.

⑪ Jun Hirata, Norihisa Ikoma and Kazunaga Tanaka: Nonlinear scalar field equations in R^N: mountain pass and symmetric mountain pass approaches, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 35 (2010), No. 2, pp. 253-276, 査読有.

⑫Kousuke Kuto and Tohru Tsujikawa: Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model I: Existence, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, Vol. 14 (2010), No. 3, pp. 1105-1117, 査読有.

⑬Munemitsu Hirose: Existence of global solutions to the Cauchy problem for some reaction-diffusion systems, Differential Integral Equations, Vol. 23 (2010), No. 7-8,

pp. 671-684, 査読有.
⑭ Kousuke Kuto and Yoshio Yamada: Positive solutions for Lotka-Volterra competition systems with large cross-diffusion, Appl. Anal., Vol. 89 (2010), No.7, pp. 1037-1066, 査読有.
⑮ Kimie Nakashima, Wei-Ming Ni and Linlin Su: An indefinite diffusion problem in population genetics, I. Existence and limiting profiles, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 27 (2010), No. 2, pp. 617-641, 査読有.
⑯ Tohru Wakasa and Shoji Yotsutani: Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems, Commun. Pure Appl. Anal., Vol. 9 (2010), No. 2, pp. 539-561, 査読有.
⑰ Kousuke Kuto and Yoshio Yamada: Coexistence problem for a prey-predator model with density dependent diffusion, Nonlinear Anal., Vol. 71 (2009), pp. e2223-e2232, 査読有.
⑱ Junichi Harada and Mitsuharu Ôtani: Semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, Nonlinear Anal., Vol. 71 (2009), pp. e2965-e2968, 査読有.
⑲ Tohru Wakasa: Representation and asymptotic formulas for 1-dimensional linearized eigenvalue problems with Dirichlet boundary condition, Nonlinear Anal., Vol. 71 (2009), pp. e2696-e2704, 査読有.
⑳ Kousuke Kuto and Yoshio Yamada: Limiting characterization of stationary solutions for a prey-predator model with nonlinear diffusion of fractional type, Differential Integral Equations, Vol. 22 (2009), No. 7-8, pp. 725-752, 査読有.
㉑ Yohei Sato and Kazunaga Tanaka: Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations with steep potential wells, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 361 (2009), No. 12, pp. 6205-6253, 査読有.
㉒ Kousuke Kuto: Stability and Hopf bifurcation of coexistence steady-states to an SKT model in spatially heterogeneous environment, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 24 (2009), No. 2, pp. 489-509, 査読有.
㉓ Kazuhiro Oeda: Stationary patterns for a Lotka-Volterra cooperative model with a density dependent diffusion term, Funkcial. Ekvac., Vol. 52 (2009), No.1, pp. 93-112, 査読有.

〔学会発表〕（計 10 件）
① Yoshio Yamada: Spreading and vanishing for free boundary problems arising in mathematical biology, Conference on Evolution Equations, Related Topics and Applications, 2012 年 3 月 22 日，早稲田大学.
②Yoshio Yamada: Population models with nonlinear diffusion, PDE Seminar, 2012 年 2 月 21 日，ニューイングランド大学，アーミデイル，オーストラリア.
③山田義雄：交差拡散を伴う数理生態学モデルについて，RIMS 共同研究「非線形拡散の数理」，2012 年 2 月 13 日，京都大学数理解析研究所.
④兼子祐大，山田義雄：数理生態学に現れる反応拡散方程式の自由境界問題について、日本数学会秋季総合分科会, 2011 年 9 月 30 日，信州大学.
⑤久藤衡介，山田義雄：Coexistence states for the SKT model with large-cross diffusion，日本数学会秋季総合分科会，2011 年 9 月 28 日，信州大学.
⑥Yoshio Yamada: Free boundary problems for some population models with diffusion, One Forum, Two Cities, Aspect of Nonlinear PDEs,　2011 年 8 月 31 日，国立台湾大学、台湾.
⑦Yoshio Yamada: On limit systems for some population models with cross-diffusion, Workshop on PDE Models of Biological Processes, 2010 年 12 月 17 日，国立理論科学中心，新竹，台湾.
⑧Yoshio Yamada: Mathematical analysis of SKT model in population biology, The 2nd Nagoya Workshop on Differential Equations, 2010 年 3 月 15 日，名古屋大学.
⑨Yoshio Yamada: Limiting behavior of positive steady-states for the Lotka-Volterra competition with large cross-diffusion, Conference on Evolution Equations, Related Topics and Applications, 2009 年 9 月 7 日，ミュンヘン工科大学，ミュンヘン，ドイツ.
⑩Yoshio Yamada: On a certain class of population models with nonlinear diffusion, the 6th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, 2009 年 5 月 25 日，ガエタ，イタリア.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.f.waseda.jp/yamada/

６．研究組織
(1)研究代表者
山田　義雄（YAMADA YOSHIO）

早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20111825

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
大谷　光春（ÔTANI MITSUHARU）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：30119656
田中　和永（TANAKA KAZUNAGA）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20188288
廣瀬　宗光（HIROSE MUNEMITSU）
明治大学・理工学部・准教授
研究者番号：50287984
中島　主恵（NAKASHIMA　KIMIE）
東京海洋大学・海洋科学部・准教授
研究者番号：10318800
竹内　慎吾（TAKEUCHI SHINGO）
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：00333021
久藤　衡介（KUTO KOUSUKE）
電気通信大学・情報理工学研究科・准教授
研究者番号：40386602
若狭　徹（WAKASA TOHRU）
九州工業大学・工学研究院・准教授
研究者番号：20454069
大屋　博一（OHYA HIROKAZU）
佐世保工業高等専門学校・一般科目・講師
研究者番号：70409647
大枝　和浩（OEDA KAZUHIRO）
早稲田大学・理工学術院・助手
研究者番号：70580364
（H22～H23）
佐藤　典弘（SATO NORIHIRO）
早稲田大学・理工学術院・助手（H21）
研究者番号：80454023
（H21）