

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24年 5月 28日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：平成21年度～平成23年度

課題番号：21540230

研究課題名（和文） 遅れを持つ積分・微分方程式とその離散化方程式の精度と安定性

研究課題名（英文） Accurateness and stability of delayed integral and differential equations and their discrete versions.

研究代表者

室谷 義昭（MUROYA YOSHIAKI）

早稲田大学・理工学術院・名誉教授

研究者番号：90063718

研究成果の概要（和文）：時間遅れをもつ SIR 感染症モデルの安定性解析の研究を解決した McCluskey (2010) 論文の手法を、SIRS 感染症モデルに応用し、当初は摂動的に、ついで、Lyapunov 関数法を拡張し、免疫消失項が比較的小さい場合の病理平衡点の大域漸近安定となる十分条件を得た。更に、グループ SIR モデルへ応用し、グラフ理論を使わない簡単な方法も考案した。一方、Xu and Ma (2010) 論文の単調法を改良する事により、免疫消失項が大きい場合の病理平衡点の大域漸近安定となる十分条件を大幅に拡張した。この単調法による解析手法は、Lyapunov 関数法と異なる解析手法であり、今後の応用が期待できる。さらに、当時オープン問題となっていた、連続感染症モデルから、如何にして、大域漸近安定となる離散モデルを見つけるかという問題を、後退オイラー法をベースにした離散モデルへの自然な拡張法を見つけ、解決した。また、パーマネンスの解の正の下界を求める手法を発展させ、それをグループモデルにも拡張できる手法を開発した。

研究成果の概要（英文）：Applying the Lyapunov function techniques in MacCluskey (2010) which solve the open question on the global stability for delayed SIR epidemic models, we obtain results on sufficient condition of global stability, first by perturbation techniques, and second by extending the Lyapunov function techniques of MacCluskey which are corresponding to small loss rate of immunity recovery individuals. On the other hand, by modified monotone iterative techniques in Xu and Ma (2010), we improve results on the global stability for large loss rate of immunity recovery individuals.

This monotone iterative techniques is a different techniques than that of Lyapunov function and we may hope to their applications to other models.

Moreover, we find some natural extensions on global stability of continuous epidemic models to discrete models derived by the backward Euler method, by which we solve the open problem how to find the discrete version of the continuous model which keeps the global stability property.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
21年度	600,000	180,000	780,000
22年度	500,000	150,000	650,000
23年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1600,000	480,000	2080,000

研究分野：

科研費の分科・細目：

キーワード：関数方程式の大域理論；数理モデル；感染症モデル；大域漸近安定性；Lyapunov 関数法

1. 研究開始当初の背景

これまで、感染症の流行に伴い、種の時間変化に対する個体群動態に関する漸近挙動を調べるために様々な数理モデル（微分方程式や差分方程式）が利用されてきた。

Kenmark と McKendrick (1927) 以来 Anderson と May (1979) によって考案された SIR (Susceptible-Infected-Recovered) 感染症モデルは数理生物学の発展過程において特に有名である。一方、ペストやマラリア、デング熱といった媒介生物のいる感染症の伝播を調べるために考案された、時間遅れをもつ SIR 感染症モデルの安定性解析の研究は Takeuchi 等 (2000) など、先覚的研究にも関わらず、時間遅れが十分大きい場合での感染症平衡点の大域安定性解析が永らく未解決問題として残っていた。そのような中で、斬新な Lyapunov 数を用いた手法で、McCluskey 論文(2010) により、時間遅れをもつ SIR 感染症モデルの問題は完全に解析された。

この McCluskey (2010) 論文がきっかけとなり、双線形接触項だけでなく、飽和型接触項などの非線形接触項を持つ場合の時間遅れをもつ SIR タイプの感染症モデルの大域漸近安定性解析の研究が大きく進展し、現在も進行中である。

2. 研究の目的

この感染症数理モデルの基本再生産数に関する大域漸近安定性理論の発展を目指す。特に、Lyapunov 関数法や単調法による、SIR 感染症モデルや SIRS 感染症モデル、また、グループモデルへの応用、並びに、これらの離散モデルへの応用を目指す。また、これらの手法の本質をつかみ、教育的見地から整理し、今後の応用に寄与する。

3. 研究の方法

当初は perturbation 手法をとりあえず考えるが、それをベースに Lyapunov 関数法の本質にせまり、かつ教育的観点から、如何に、数学的に理解しやすい記述で、大域漸近安定性をまとめるかにも、注意したい。また、単調反復法、数値解析的手法の応用など、この分野では、あまり見かけないが、大事な手法の1つであり、その開発と応用を目指す。

4. 研究成果

SIRS 感染症モデルに拡張することを考え、当初は摂動的に、ついで、Lyapunov 関数法を拡張し、免疫消失項が比較的小さい場合の感染症平衡点の大域漸近安定となる十分条件を得た。更に、グループ SIR モデルへ応用し、グラフ理論を使わない簡単な方法も考案した。一方、単調法を改良する事により、免疫消失項が大きい場合の感染症平衡点の大域漸近安定となる十分条件を大幅に拡張することができた。後退オイラー法をベースにした離散モデルへの自然な拡張法で、遅れなしと遅れ付きの2つの場合に対応する、大域漸近安定となる離散モデルの正の下界を求める手法を発展させ、それをグループモデルにも拡張できる手法を開発した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 26 件) 全て査読有。

[1] Y. Enatsu, E. Messina, Y. Muroya, Y. Nakata, E. Russo and A. Vecchio, Global dynamics of a delayed SIRS epidemic model with a wide class of nonlinear incidence rates, J. Appl. Math. Comput. 39 (2012) 15-34.

[2] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability of SIRS epidemic models with a class of nonlinear incidence rates and distributed delays, Acta Mathematica Scientia 32 (2012) 851-865. 00208R1.

[3] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Lyapunov functional techniques for the global stability analysis of a delayed SIRS epidemic model, Nonlinear Analysis RWA 13 (2012) 2120-2133.

- [4] Y. Nakata, Y. Enatsu and Y. Muroya, Two type of condition for the global stability of delayed SIS epidemic models with nonlinear birth rate and disease induced death rate, *Inter. J. Biomath.* 5 (2012) 1250009(29pages),
- [5] Y. Enatsu, E. Messina, Y. Muroya, Y. Nakata, E. Russo and A. Vecchio, Stability analysis of delayed SIR epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, *Appl. Math. Comput.* 218 (2012) 5327–5336.
- [6] Y. Muroya, A. Bellen, Y. Enatsu and Y. Nakata, Global stability for a discrete version of an epidemic SIR model with immigration of infectives for disease with latency spreading in a heterogeneous host population, *Nonlinear Analysis RWA* 13 (2012) 258–274.
- [7] Y. Nakata, Y. Enatsu and Y. Muroya, On the global stability of SIRS epidemic models with distributed delays, accepted in *Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement* 15 (2011) 1119–1128.
- [8] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability for a discrete SIS epidemic model with immigration of infectives, *J. Differ. Eq. Appl.* iFirst article, 2011, 1–12. doi:10.1080/10236198.2011.602973.
- [9] Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, G. Izzo and A. Vecchio, Global dynamics of difference equations for SIR epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, *J. Differ. Equ. Appl.* iFirst articles, 2011, 1–19. doi:10.1080/10236198.2011.555405.
- [10] Y. Muroya, Y. Nakata, G. Izzo and A. Vecchio, Permanence and global stability of a class of discrete epidemic models. *Nonlinear Analysis RWA* 12 (2011) 2105–2117.
- [11] Y. Muroya, Y. Enatsu and Y. Nakata, Monotone iterative techniques to SIRS epidemic models with nonlinear incidence rates and distributed delays, *Nonlinear Analysis RWA* 12 (2011) 1897–1910.
- [12] Y. Muroya, Y. Enatsu and Y. Nakata, Global stability of a delayed SIRS epidemic model with a non-monotonic incidence rate, *J. Math. Anal. Appl.* 377 (2011) 1–14.
- [13] M. Kuroda and Y. Muroya, Global stability in “delay systems” with cross-diffusions dominated by self-diffusions, *Nonlinear Analysis RWA* 12 (2011) 990–1001.
- [14] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability of SIR epidemic models with a wide class of nonlinear incidence rates and distributed delays, *Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series B* 15 (2011), 61–74.
- [15] E. Messina, Y. Muroya, Y. Nakata, E. Russo and A. Vecchio, An affirmative answer to Gopalsamy and Liu’s conjecture on population models with piecewise constant arguments, *International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications* 4 (2010) 1–20.
- [16] E. Messina, Y. Muroya, E. Russo and A. Vecchio, Convergence of solutions of two delays Volterra Integral Equations in the critical case, *Appl. Math. Letters* 23 (2010), 1162–1165.
- [17] E. Messina, Y. Muroya, E. Russo and A. Vecchio, On the stability of numerical methods for nonlinear Volterra integral equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2010, Article ID 862538, 18 pages doi:10.1155/2010/862538.
- [18] H. Li, Y. Muroya, Y. Nakata and R. Yuan, Global stability of nonautonomous logistic equations with a piecewise constant delay, *Nonlinear Analysis RWA* 11 (2010), 2115–2126.
- [19] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability for a class of discrete SIR epidemic models, *Math. Biosc. Eng.* 7 (2010), 347–361.
- [20] Y. Nakata and Y. Muroya, Permanence for nonautonomous Lotka–Volterra cooperative systems with delays, *Nonlinear Analysis RWA* 11 (2010), 528–534,
- [21] G. Izzo, Y. Muroya and A. Vecchio, A general discrete time model of population dynamics in the presence of an infection, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009, Article ID 143019, 15 pages doi:10.1155/2009/143019.
- [22] Y. Nakata, M. Kuroda and Y. Muroya, Contractivity for nonautonomous logistic equation with piecewise constant delays, CP1124, *Mathematical Models in Engineering, Biology, and Medicine*, Proceedings of the International Conference on Boundary Value Problems, edited by A. Cabada, E. Liz, and J. J. Nieto (2009), 254–263.
- [23] Y. Muroya and E. Ishiwata, Global stability for a class of difference equations, *J. Comput. Appl. Math.* 228 (2009), 561–570.
- [24] Y. Muroya, E. Ishiwata and N. Guglielmi, New global stability conditions for a classes of difference

equations, *Frontiers of Mathematics in China* 4 (2009), 131-154.

[25] E. Ishiwata and Y. Muroya, On collocation methods for delay differential and Volterra integral equations with proportional delay, *Frontiers of Mathematics in China* 4 (2009), 89-111.

[26] H. Li, Y. Muroya and R. Yuan, A sufficient condition for the global asymptotic stability of a class of logistic equations with piecewise constant delay, *Nonlinear Analysis RWA* 10, (2009), 244-253.

[学会発表] (計 15 件)

① 室谷義昭 非線形接触項を持つ病理モデルの大域安定性、第 40 回数値解析研究会、2011 年 6 月 21 日、鳥羽シーサイドホテル。

② Y. Muroya, Y. Nakata, Y. Enatsu, Global stability of delays SIRS epidemic models with nonlinear incidence rates and related problems, BCAM Seminar, 2011 年 2 月 23 日、ビブラオ (スペイン)。

③ Y. Muroya, Y. Enatsu, Y. Nakata, The 3-th China-Japan Colloquium of Mathematical Biology, 2010 年 10 月 19 日、北京 (中国)。

④ Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Global asymptotic stability of SIRS models with a class of nonlinear incidence rates and distributed delays, The 3-th China-Japan Colloquium of Mathematical Biology, 2010 年 10 月 19 日、北京 (中国)。

⑤ 室谷義昭、江夏洋一、中田行彦、非線形感染接触項と時間遅れをもつ SIRS 感染症モデルの大域漸近安定性、日本数学会秋季総合分科会・応用数学分科会、2010 年 9 月 25 日、名古屋大学。

⑥ 室谷義昭、江夏洋一、中田行彦、Global stability of SIRS epidemic models with nonlinear incidence rates and distributed delays, 第 35 回応用数学研究集会、2010 年 8 月 21 日、福岡教育大学。

⑦ 室谷義昭、江夏洋一、離散グループ SIRS 病理モデルの大域漸近安定性、第 39 回数値解析研究会、2010 年 5 月 27 日、鳥羽シーサイドホテル。

⑧ Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Global stability for a class of epidemic models with delays and a nonlinear incidence rate, 8-th AIMS Conference, 2010 年 5 月 26 日、ドレス

デン (ドイツ)。

⑨ Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Global asymptotic stability for a class of epidemic models with delays, International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2010 年 3 月、早稲田大学。

⑩ Y. Muroya, Y. Enatsu, Y. Nakata, Stability analysis of delayed epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, Naples U (Federico II) Numerical Analysis Seminar, 2010 年 3 月 12 日、Naples U (Federico II)。

⑪ Y. Muroya, Y. Enatsu, Y. Nakata, Global asymptotic stability for delayed epidemic models with non-monotone incidence rates, TU Darmstadt Fluid Analysis Seminar, 2010 年 2 月 23 日、TU Darmstadt。

⑫ Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Stability analysis of delayed epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, International Research Training Group 1529 Mathematical Fluid Dynamics Seminar, 2010 年 2 月、TU Darmstadt。

⑬ 室谷義昭、江夏洋一、中田行彦、SIR 病理モデルの大域漸近安定性と関連する話題、HMA 冬の特別セミナー、2010 年 1 月 8 日、広島大学。

⑭ Y. Enatsu, Y. Nakata, Y. Muroya, Stability analysis of delayed SIR epidemic models with a class of nonlinear incidence rates, Conference on Evolution Equations, Related Topics and Applications, 2009 年 9 月、ミュンヘン (ドイツ)。

⑮ 江夏洋一、中田行彦、室谷義昭、非線形接触項と時間遅れをもつ感染症モデルの大域漸近安定性、日本数学会秋季総合分科会、2009 年 9 月、大阪大学。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

室谷 義昭 (早稲田大学 理工) 名誉教授

研究者番号 : 90063718