**様式Ｃ－１９**

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月１４日現在

機関番号：15101
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009 ～ 2011
課題番号：21540387
研究課題名（和文）1:2 共鳴によるパターン形成

研究課題名（英文）Pattern formation due to 1:2 resonance

研究代表者
藤村　薫（FUJIMURA KAORU）
鳥取大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：70294337

研究成果の概要（和文）：波数比１：２の定常モード間共鳴相互作用が形成する時空間パターンを，正六角形格子上で調べた．変形されたスウィフト・ホーヘンバーグ方程式と熱対流を記述する流体方程式を対象に，弱非線形理論を適用することによって複素６次元の振幅方程式を導出し，定常解の分岐特性を解析した．さらに，ヘテロクリニックサイクル等の非定常解の詳細について調べ，線形作用素の非自己随伴性が強くなると２次元ヘテロクリニック軌道は不安定化されることを見出した．

研究成果の概要（英文）：Spatio-temporal pattern formation due to resonant mode interaction between steady modes having wavenumbers in the ratio 1:2 was investigated on a hexagonal lattice. Six-dimensional amplitude equations were derived on the weakly nonlinear basis and were analyzed on the bifurcation of their solutions. Based on amplitude equations derived from modified Swift-Hohenberg equation and those derived from governing equations for thermal convections, bifurcation characteristics of steady solutions were clarified. Details of unsteady solutions including heteroclinic cycles were investigated. It was found that heteroclinic orbit in two-dimensional invariant subspace was destabilized when non-self-adjointness of the operators involved in the linearized PDEs is getting significant.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2009 年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 2010 年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2011 年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 2,200,000 | 660,000 | 2,860,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎
キーワード：流体物理，パターン形成

## １．研究開始当初の背景

ブシネスク近似のもとでの上下対称な熱対流系では，正六角形格子上で対流の振幅に対して導かれた３次の非線形項を含むノーマルフォームは，正六角形と正三角形の区別と，それらの安定性の評価ができず，５次の非線形項を含めることによってはじめて解決されることが 1980 年代の同変分岐理論を用いた研究によって指摘された．研究代表者は，中心多様体定理の方法を用いて５次の振幅方程式の導出を行い，この問題に決着をつけたと同時に，実験的に観察され，数値解

析によって確認された「再入（リエントラント）正六角形」と呼ばれる臨界条件から遠く離れたパラメター領域での正六角形パターンの存在に対する必要条件を求めた．

格子上での共鳴相互作用に関しては，最も強い相互作用である２次の共鳴が格子の上で吟味されている．正方形格子上では波数比 $1:\sqrt{2}$ の共鳴が調べられた結果，複雑なヘテロクリニックサイクルの存在が明らかになった．正六角形格子の場合には波数比 $1:\sqrt{3}$ 共鳴と 1:2 共鳴が重要であるが，前者については減衰項をもつ蔵本・シバシンスキー方程式に対して部分的な解析が行われたに過ぎず，後者については研究代表者によるものが唯一である．

## ２．研究の目的

レイリー・ベナール対流におけるパターン形成問題は百年以上にもわたる非常に長い研究の歴史をもち，理論，実験，数値解析のいずれの面からも深い理解が得られているのは周知の事実である．とはいえ，対流発生直後の弱非線形領域においてさえ，未解決な問題が数多く残されているのが実情である．今世紀に入って，２次元空間内でのレイリー・ベナール問題に対する数値解析によって，O(2) 対称性のもとでの波数比 1:2 の共鳴相互作用が詳細に検討された. その結果, 1:2 共鳴を記述するノーマルフォームの解として知られる２つの定常解, 伝播波解, 変調波解, 構造安定なヘテロクリニック軌道などが非線形偏微分方程式の解として数値的に再現された．

本研究では, (1)これらの解が３次元空間においてもロバストに存在するのかという問いに対して解答を下す．これが本研究計画の第１の目的である．(2)３次元空間内では 1:2 共鳴によりどのような時空間パターンが安定に生成されるのかを，①弱非線形理論と②高次元力学系の数値解析を通して明らかにする．これが第２の目的である．

## ３．研究の方法

(1) O(2)対称性の下での解が正六角形格子上でもロバストに存在するかについて調べるため， 研究代表者がすでに導いていた２層レイリー・ベナール問題に対する振幅方程式を用いて，分岐解析並びに２次元ヘテロクリニック軌道のロバスト性についての議論を行った．なお，振幅方程式のもつ不動点の解析並びに周期解の解析には，オイラー・ニュートン弧長接続法を用い，また，分岐解析ソフト XPPAUT も併用した. 非定常解の遷移については，振幅方程式を直接数値積分して調べた．(2) ３次元空間内では 1:2 共鳴によりどのような時空間パターンが安定に生成されるのかを調べるため，非線形偏微分方程式の典型例として，レイリー・ベナール問題から３次の非線形項をもつ振幅方程式を，また，変形されたスウィフト・ホーヘンバーグ方程式からは５次の非線形項をもつ方程式を導出した．振幅方程式がどのような項を含むかをあらかじめ見積もる目的と，振幅方程式の持つ定常解の安定性を評価するために，同変分岐理論を用いた．振幅方程式を非線形偏微分方程式から具体的に導出するための弱非線形解析として，本研究では中心多様体定理に基づく方法を用いた．方程式に含まれる係数の決定に用いた数値解析では空間離散化はチェビシェフ多項式展開によった．

## ４．研究成果

(1) ２層レイリー･ベナール問題における 1:2 共鳴に対して，既に研究代表者は振幅方程式を導出し，単純な定常解の分岐図を求め，また，予備的な検討の結果，複素２次元不変部分空間に閉じ込められたヘテロクリニック軌道が４次元不変部分空間におけるヘテロクリニックサイクルに対して不安定になり得ることを見出していた．第１の課題として，その際に用いた振幅方程式を元に構造安定な２次元ヘテロクリニック軌道から４次元ヘテロクリニックサイクルが得られる機構を探るため，詳細な解析を行った．1:2 共鳴の振幅方程式は正六角形格子上で次の形をもつ：

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \sigma_1 z_1 + z_1[\kappa_{11}u_1 + \kappa_{12}(u_2+u_3)] + z_1[\mu_{11}u_4 + \mu_{12}(u_5+u_6)] \\
&+\delta_1 \bar{z}_2\bar{z}_3 + \beta_1 \bar{z}_1 z_4 + \nu_1 \bar{z}_1\bar{z}_5\bar{z}_6 + \xi_1 z_2 z_3 z_4 + \eta(\bar{z}_2 z_3 \bar{z}_6 + z_2\bar{z}_3\bar{z}_5) \\
\dot{z}_4 &= \sigma_2 z_4 + z_4[\kappa_{21}u_1 + \kappa_{22}(u_2+u_3)] + z_4[\mu_{21}u_4 + \mu_{22}(u_5+u_6)] \\
&+\delta_1 \bar{z}_5\bar{z}_6 + \beta_1 z_1^2 + \nu_2 z_1\bar{z}_2\bar{z}_3 + \xi_2(\bar{z}_3^2\bar{z}_5 + \bar{z}_2^2\bar{z}_6), \quad u_j = |z_j|^2
\end{aligned}
$$

ただし，流れに加えられた撹乱を

$$
\begin{aligned}
&z_1\phi_1\,\mathrm{e}^{ikx} + z_2\phi_1\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2}(x+\sqrt{3}y)} + z_3\phi_1\,\mathrm{e}^{\frac{ik}{2}(x-\sqrt{3}y)} + c.c. \\
&+z_4\phi_4\,\mathrm{e}^{2ikx} + z_5\phi_4\,\mathrm{e}^{ik(x+\sqrt{3}y)} + z_6\phi_4\,\mathrm{e}^{ik(x-\sqrt{3}y)} + c.c. + \cdots
\end{aligned}
$$

の形に仮定した．

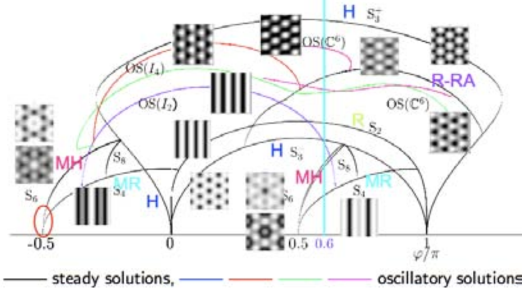


図１． ２層レイリー・ベナール問題（上層に水，下層にプラントル数 150 のシリコンオイルを満たす）における 1:2 共鳴による分岐図. 黒線は定常解，カラー線は振動解.

この方程式がもつ，複素６次元空間における固定点部分空間の次元が２以下の解分枝と単純な周期解を図１に示す．図中 $\phi/\pi$ は波数 k と $2k$ のモードの増幅率を$\sigma_1$，$\sigma_2$ とするとき，$\sigma_1=\cos\phi$，$\sigma_2=\sin\phi$ の関係を満たす．次に４次元不変部分空間に限定して，XPPAUT を用いて求めた詳細な分岐図を図２に示す．

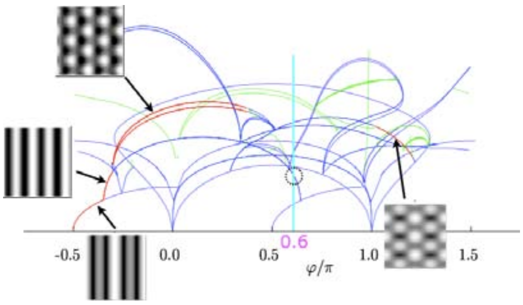


図２． ４次元不変部分空間における分岐図．青線：定常解，緑線：振動解，赤線：安定
.

さて，２層レイリー・ベナール問題を記述する流体方程式を熱伝導解の周りで線形化すると，自己随伴な線形作用素が得られる．その場合は，振幅方程式の中で，$z_1, z_2, z_3$ 間および $z_4$, $z_5$, $z_6$ 間の２次のカップリングが存在しないため，上述の３次の振幅方程式は生成的でない．そこで縮退を解くために自己随伴性からのずれ，すなわち，流体密度が温度の弱い２次関数であると仮定したときの，２次の項の強さを開折パラメターとした．開折パラメターが０である場合，２次元不変部分空間に閉じ込められたヘテロクリニック軌道（AGH サイクル）は構造安定であることが知られている．この軌道は空間１次元方向に波数ベクトルを持つ 1:2 共鳴における異符号の単純解（ロール解）を繋ぐものである．

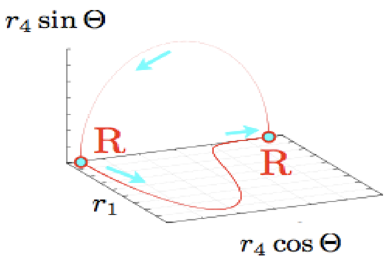


図３．２次元不変部分空間上の AGH サイクル．R は O(2) 下での 1:2 共鳴における単純解（正六角形格子上での単純ロール）.

正六角形格子上では $z_1$, $z_2$ ,$z_3$ 間ならびに $z_4, z_5, z_6$ 間の相互作用が重要であるが，開折パラメターが十分小さい場合は，そのカップリングは弱く，絶対値を通して３次のオーダーで行われる．これに対して，$z_1, z_4$ 間，$z_2, z_5$ 間，および$z_3$，$z_6$ 間では２次の位相を通してのカップリングが存在し，これが支配的である．そのため，O(2)対称下で存在する 1:2 共鳴に特徴的な AGH サイクルが安定に得られた．（図３）

$z_1, z_2, z_3$ および $z_4, z_5, z_6$ 間と $z_1, z_4$ 間，$z_2, z_5$ 間および $z_3, z_6$ 間でのカップリングが同程度になるような値を開折パラメターがとる場合には，研究代表者が予備解析で見出していた複素４次元不変部分空間に閉じ込められたヘテロクリニックサイクルが安定に存在可能になる．このサイクルを詳細に調べた結果，２次元の AGH サイクルを構成する異符号の単純ロール解に加え，位相がランダムに変化する単純モードとしての正六角形を内包しており，その時間発展の様子は３次元空間内では図４のとおりであることが分かった．

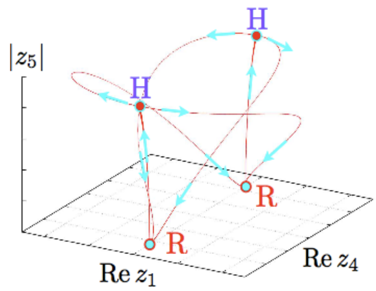


図４． ４次元不変部分空間におけるヘテロクリニックサイクル．R は単純なロール解，H は単純な正六角形解.

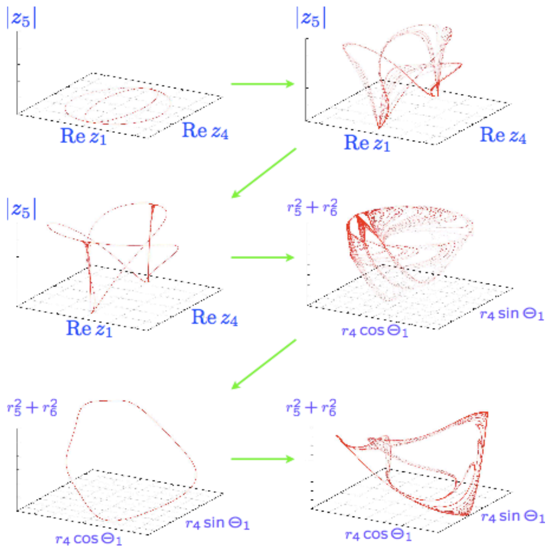


図５．２次元不変部分空間上の AGH サイクルから３次元空間におけるカオス解への遷移．矢印は開折パラメターの増加の向きを示す．上段右と中段左は４次元空間，中段右は６次元空間，下段は３次元空間内の解.

開折パラメターが O(1) になると，　$z_1$，$z_2$ ,$z_3$ 間ならびに $z_4$，$z_5$，$z_6$ 間のカップリングが強くなり，$z_1, z_4$ 間，$z_2, z_5$ 間，および$z_3, z_6$ 間のカップリングに打ち勝つ．その結果，４次元部分空間に閉じ込められたヘテロクリニックサイクルは不安定化して６次元空間における周期解，カオス解を経て，複素３次元の不変部分空間に閉じ込められた単純モードとしての正六角形や，絶対値が等しい値をもつ$z_4$，$z_5$，$z_6$ から成るカオス解が安定な解として得られることが分かった．なお，$u_4$=$u_5$=$u_6$ を満たす複素３次元不変部分空間におけるカオス解の存在は，本研究ではじめて見出されたものである．

(2) 水平面内に無限に広がる熱対流問題のように，水平面内で等方な系では，波数ベクトルの大きさは臨界波数として決まるがその方向は決まらない．したがって，波数平面上では臨界波数を半径とする臨界円の上に無限大の重複度をもつ縮退が生じる．本研究では，第２の課題として，非線形偏微分方程式の解を，正六角形格子上にその波数ベクトルを制限することにより，重複度無限大の縮退を解き，有限次元の力学系へ次元の低減を行った．

通常のスウィフト・ホーヘンバーグ方程式の場合には，1:2 共鳴は臨界モード間ではなく中立モード間で発生可能である．しかし，中立曲線上に波数比が 1:2 となる共鳴点を選ぶと，$\sqrt{3}$ の波数を持つ攪乱は増幅モードであるため，$\sqrt{3}$ のモードを安定多様体上のモードとして取り扱うことができないことが明らかになった．その際には，中心不安定多様体を含めた解析によって９次元の複素空間における力学系を導く必要がある．そこで，本研究では，スウィフト・ホーヘンバーグ方程式に含まれる線形項を変形し分散関係式 $\sigma$=$\sigma(k)$ が 1:2 共鳴条件を臨界点の間で満たすようにした：

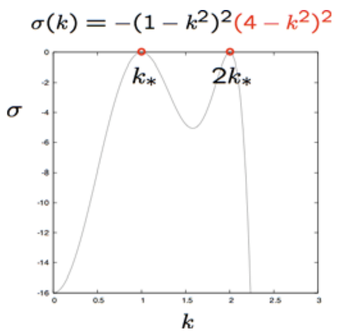


図６．変形されたスウィフト・ホーヘンバーグ方程式の線形分散関係．$\sigma$は増幅率．

その結果，1:2 共鳴の振幅方程式を通常の中心多様体低減の手続きに従って導くことが可能になったが，このままでは，レイリー・ベナール問題における上下反転に相当する $Z_2$ 対称性のために，偶数次の項を内包することができず，３次の振幅方程式は生成的ではない．そこで，５次まで近似を進めて生成的な方程式を導いた．図７は典型的な分岐図である．図から明らかなように，-0.5$\pi$≤$\phi$≤1 のほぼすべての領域で安定な定常解が存在する．そのため，振幅方程式の数値積分の結果からは，ヘテロクリニック軌道のみならず，安定な周期解の存在をも確認することができなかった．また，変形されたスウィフト・ホーヘンバーグ方程式に含まれる３次の非線形項に弱い２次の項を付加することによって $Z_2$ 対称性に伴う縮退を解き，周期解やヘテロクリニック軌道などの存在を探ったが，その存在も確認できなかった．

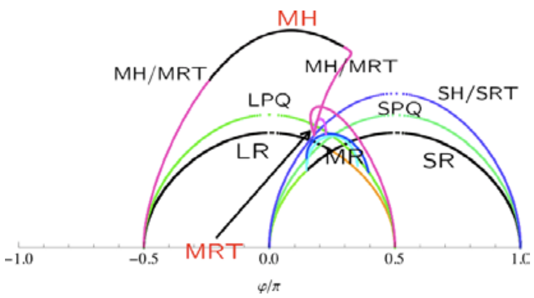


図７．５次の非線形項をもつ変形されたスウィフト・ホーヘンバーグ方程式の定常解．固定点部分空間の次元 ≤2. 黒線：安定．図中 S は小さなサイズ，L は大きなサイズの単純解，M は混合解を意味する．

レイリー・ベナール問題でも，臨界モード間ではなく中立モード間で 1:2 共鳴は発生可能である．上下が固体壁で境されたレイリー・ベナール問題に対しては，ブシネスク近似の下で上下反転による鏡映対称性，すなわち $Z_2$ 対称性が存在する．1:2 の共鳴モードは偶関数，$\sqrt{3}$ のモードは減衰率の大きな奇関数であるため，スウィフト・ホーヘンバーグ方程式のような困難は生じない．ただ，ここでも３次の振幅方程式は生成的ではない．しかし，５次の方程式には３次の方程式の右辺に 60 項もの項が付加されなければならず，その係数の数値的評価は困難を極める．そのため，ここでは３次で振幅方程式の導出を打ち切り，方程式に含まれる係数値を数値解析によって決定した．

さて，レイリー・ベナール問題における再入正六角形の存在は，５次の振幅方程式によって記述可能であることを研究代表者は先に明らかにしたが，その存在領域は 1:2 共鳴点の近傍にまで及ぶことが，実験と数値解析

の結果指摘されていた．したがって，そのような場所では，1:2 共鳴の解析を行って，はたして波数１に相当する正六角形が再入正六角形として安定に得られるかを明らかにする必要がある．今回の解析結果によると，単純モードとしての正六角形は不安定であるが，混合モードとしての正六角形が再入モードとして安定に存在できることが分かった．ここで，混合モードとしての正六角形とは，共鳴する２つの波数をもつ正六角形の重ね合わせによって形成される空間パターンを意味し，図１や図７においてすでに MH とラベル付けしていたものである．これによって，再入正六角形は 1:2 共鳴点近傍においても，振幅方程式で予測可能であることが明らかになった．

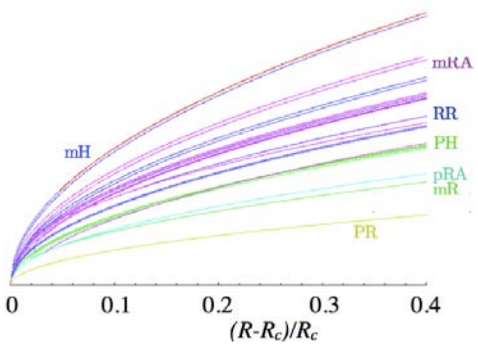


図８．レイリー・ベナール問題における 1:2 共鳴による定常解．作動流体は水．mH：混合正六角形．mH 上の赤線部：安定な再入正六角形に相当．

なお, O(2) 対称性下での Hopf モードによる 1:2 共鳴に関する弱非線形理論については，従来ほとんど研究が行われていない．そこで，$O(2)\times S^1$ 下での Hopf モードによる 1:2 共鳴の同変ベクトル場が生成するノーマルフォームの一般形を同変分岐理論にもとづいて決定し，３次の振幅方程式の形を求めた．さらに，中心多様体低減によって，形式的にその方程式を導出した．この解析は，将来的にHopf モード間 1:2 共鳴をO(2) 上から正六角形格子上に拡張する目的で遂行したものである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

(1) S.C. Generalis and K. Fujimura: “Range of validity of weakly nonlinear theory in the Rayleigh-Benard problem”, J. Phys. Soc. Jpn. 78, 084401/1-11 (2009). 査読有, DOI: 10.1143/JPSJ.78.084401

〔学会発表〕（計５件）

(1) K.Fujimura: ″1:2 resonance and pattern formation in thermal convections,″ 64th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, メリーランド州ボルティモア市 11 月 20 日 (2011) 講演要旨：Bulletin of the American Physical Society, Vol.56, No.18, D15-5 (2011).

(2) 藤村薫：“熱対流における 1:2 共鳴とヘテロクリニックサイクル”, 日本物理学会秋季大会, 富山大学 9 月 23 日 (2011) 講演要旨：講演概要集 第 66 巻第２号第２分冊 23pGS10 (2011).

(3) 藤村薫：“液柱 Marangoni 対流の安定性”, 日本流体力学会年会 2011 首都大学東京南大沢キャンパス 9 月 7 日 (2011) 講演要旨：講演要旨集 p.49 (2011).

(4) 藤村薫：“液柱の Marangoni 対流に対する弱非線形安定性”, 第 60 回理論応用力学講演会 東京工業大学大岡山キャンパス 3 月 10 日 (2011) 講演要旨：講演論文集 GS04-04 (2011).

(5) 藤村薫：“1:2 共鳴によるパターン形成”, （招待講演） 流体数学セミナー（早稲田大学） 10 月 8 日 (2010).

〔その他〕
ホームページ等
http://www.damp.tottori-u.ac.jp/%7Elab4/kaoru/cv_j.html

６．研究組織
(1)研究代表者

藤村 薫（FUJIMURA KAORU）
鳥取大学，工学研究科，教授
研究者番号：70294337