

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540397

研究課題名(和文) ランダムな曲線やパターンの集団に対する統計力学の構築とその応用

研究課題名(英文) Construction and Application of Statistical Mechanics for Random Curves and Patterns

研究代表者

香取 眞理 (Katori, Makoto)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：60202016

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 時空上に拡張された行列式点過程として行列式過程を定義した。非衝突ブラウン運動と非衝突ベッセル過程に対して、多重直交関数系を用いることで、これらが行列式過程であることを証明し、時空相関関数を一般の有限初期配置に対して定めた。この結果より、非平衡状態における無限粒子系を構成し、その緩和現象を調べた。

(2) 非衝突ブラウン運動に対して複素ブラウン運動表示という新概念を得た。系がこの表示を持つことから、行列式過程であることが帰結され、すべての時空相関関数が定まる。

(3) 量子戸田格子と関係する確率過程である $O'Connell$ 過程を、非衝突ブラウン運動の一般化として定式化した。

研究成果の概要(英文)：(1) We defined determinantal processes on spatio-temporal planes as generalizations of determinantal point processes. Using systems of multiple-orthogonal functions, we proved that the noncolliding Brownian motion and the noncolliding Bessel processes are determinantal processes for arbitrary initial configurations with finite numbers of particles, in which all spatio-temporal correlation functions of these processes are determined. We constructed nonequilibrium systems with an infinite number of particles and studied relaxation phenomena to equilibrium states.

(2) We introduced a new notion, a complex Brownian motion representation, for the noncolliding Brownian motion. If the system has this representation, we can prove that it is determinantal and all spatio-temporal correlation functions are obtained.

(3) We studied $O'Connell$ process, which is related with the quantum Toda lattice. We formulated this process as a generalization of the noncolliding Brownian motion.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：非平衡統計力学 確率過程 数理物理学 ランダム行列 ランダムパターン

1. 研究開始当初の背景

高分子鎖や膜の運動、結晶表面の成長、相境界や界面の揺動、亀裂の進行や雪崩現象といった物理現象にみられる統計法則を正しく記述するには、元来の粒子集団に対する統計力学の形式を拡張し、曲線やパターンの集団に対する統計力学を構築する必要がある。このことは統計物理学を研究する者にとって、おそらく共通の認識にあると思われるが、様々な困難があり成功しているとはいえない。しかし、2次元平面あるいは1+1次元時空平面に問題を限定して考えると、1990年代後半以降の確率論およびランダム行列理論の分野におけるいくつかの顕著な発展が、この統計物理学の基本問題を解決するのに大きな助けになるものと思われる。

2. 研究の目的

ランダムな曲線やパターンの集団の統計的性質を正確に記述する方法論を開発する。そのために、ランダム行列理論や確率的レヴナー発展(SLE)理論で取り扱うことが出来る統計力学モデルを研究対象として取り上げ、厳密な結果を導く。その結果を用いて、ランダムな曲線やパターンの集団の熱力学的極限(無限粒子極限)を議論し、新しい統計力学理論の構築を目指す。

3. 研究の方法

(1) ランダム行列理論、特に多層ランダム行列モデルと多粒子系の非平衡統計モデルとの対応関係を用いることにより、前者の分野において発展した計算方法を用いて、非交差経路が時空平面上に作るランダムな曲線集団の統計的な振る舞いを詳しく研究する。

(2) 確率論の手法を用いて無限粒子系を構成する。ここでは共形変換に関する複素関数論的な知見も用いる。これにより、ランダムな曲線集団の熱力学的極限を議論する。

(3) SLE理論を勉強し応用する。

4. 研究成果

(1) 非衝突拡散過程においては、多粒子の軌跡が時空平面上に複雑な非交差経路を描くが、そのランダムな曲線集合の時空パターンの正確な記述方法の開発は、大変重要な研究課題である。時空平面で1時刻を選び、その時刻での空間上の粒子分布を考えると、それは行列式点過程と呼ばれるものであり、ランダム行列の固有値分布と関係が深い。この点過程は相関核とよばれる関数で支配されるが、それはランダム行列理論において開発された直交多項式の方法によって厳密に求めることが出来る。我々の研究課題は、この空間分布に対する行列式点過程を時空平面上に拡張することである。この時空上に拡張された行列式点過程を「行列式過程」とよぶことにする。行列式過程は初期配置によって異なるので、時空上に拡張された相関核は初期配置の汎関数となる。我々は、非衝突ブラウ

ン運動と非衝突ベッセル過程に対して、従来の直交多項式系を拡張した多重直交関数系を用いることで、時空相関関数を一般の有限初期配置に対して定めることに成功した。この結果より、非平衡状態における無限粒子系を構成し、その緩和現象を詳しく調べた。

(2) 非衝突ブラウン運動に対して、時空相関核を求めるには、実は直交多項式系は必要なく、実ブラウン運動を複素ブラウン運動に拡張し、その共形不変性を用いれば容易に導くことが出来ることが分かった。その結果、非衝突ブラウン運動の「複素ブラウン運動表示」という新しい概念を得た。系がこの表示を持つことから、プロセスが行列式過程であることが帰結され、時空相関関数の形が決まることになる。

(3) 量子戸田格子と関係する確率過程である0'Connell過程を、非衝突ブラウン運動の一般化として定式化した。この多粒子確率過程は松本とYorによって研究された1次元拡散過程の多粒子拡張である。この一般化されたプロセスの経路は時空平面上において短い空間スケールでは交差することが許される。ランダムな曲線集団としても重要なモデルであることを示した。

(4) SLEに関してはレビュー講演や講義などを行い、解説記事を執筆した。多重ループ除去過程など関連する系を研究したが、直接的にSLEに關係するオリジナルな研究成果を得るには至らなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計19件)

1. Makoto Katori and Hideki Tanemura, Complex Brownian motion representation of the Dyson model, *Electron. Commun. Probab.*, 査読有, **18**, no.4, 2013, 1-16, DOI:10.1214/ECP.v18-2554
2. Yuta Takahashi, Makoto Katori, Noncolliding Brownian motion with drift and time-dependent Stieltjes-Wigert determinantal point process, *J. Math. Phys.*, 査読有, **53**, 2012, 103305/1-23, DOI: 10.1063/1.4758795
3. Makoto Katori, System of complex Brownian motions associated with the 0'Connell process, *J. Stat. Phys.*, 査読有, **149**, 2012, 411-431, DOI: 10.1007/s10955-012-0602-y
4. Makoto Katori, Reciprocal time relation of noncolliding Brownian motion with drift, *J. Stat. Phys.*, 査読有, **148**, 2012, 38-52, DOI: 10.1007/s10955-012-0527-5
5. Makoto Katori, Survival probability of mutually killing Brownian motions and the 0'Connell process, *J. Stat. Phys.*, 査読有, **147**, 2012, 206-223, DOI:

- 10.1007/s10955-012-0472-3
6. Makoto Katori, Determinantal process starting from an orthogonal symmetry is a Pfaffian process, *J. Stat. Phys.*, 査読有, **146**, 2012, 249-263, DOI: 10.1007/s10955-011-0372-y
 7. Sergio Andraus, Makoto Katori, Seiji Miyashita, Interacting particles on the line and Dunkl intertwining operator of type A: application to the freezing regime, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 査読有, **45**, 2012, 395201/1-26, DOI: 10.1088/1751-8113/45/39/395201
 8. Makoto Katori, O'Connell's process as a vicious Brownian motion, *Phys. Rev. E*, 査読有, **84**, 2011, 061144/1-11, DOI: 10.1103/PhysRevE.84.061144
 9. Makoto Katori and Hideki Tanemura, Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels, *Markov Processes and Related Fields*, 査読有, **17**, 2011, 541-580, URL: <http://mech.math.msu.su/~malyshev/mprf.htm>
 10. Makoto Katori and Hideki Tanemura, Noncolliding squared Bessel processes, *J. Stat. Phys.*, 査読有, **142**, 2011, 592-615, DOI: 10.1007/s10955-011-0117-y
 11. Makoto Katori and Hideki Tanemura, Noncolliding processes, matrix-valued processes and determinantal processes, *Sugaku Expositions*, 査読有, **24**, 2011, 263-289, URL: <http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/sugaku>
 12. Naoki Kobayashi, Yoshihiro Yamazaki, Hiroto Kuninaka, Makoto Katori, Mitsugu Matsushita, Satoki Matsushita, Lung-Yih Chiang, Fractal structure of isothermal lines and loops on the cosmic microwave background, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 査読有, **80**, 2011, 074003/1-5, DOI: 10.1143/JPSJ.80.074003
 13. Makiko Sato and Makoto Katori, Determinantal correlations of Brownian paths in the plane with nonintersection condition on their loop-erased parts, *Phys. Rev. E*, 査読有, **83**, 2011, 041127/1-12, DOI: 10.1103/PhysRevE.83.041127
 14. Minami Izumi and Makoto Katori, Extreme value distributions of noncolliding diffusion processes, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, **B27**, 2011, 45-65, URL: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenyubu/bessatsu.html>
 15. Yasuyuki Yamada and Makoto Katori, Velocity correlations of a discrete-time totally asymmetric simple-exclusion process in stationary state on a circle, *Phys. Rev. E*, 査読有, **84**, 2011, 041141/1-8, DOI: 10.1103/PhysRevE.84.041141
 16. Makoto Katori and Hideki Tanemura, Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles, *Commun. Math. Phys.*, 査読有, **293**, 2010, 469-497, DOI: 10.1007/s00220-009-0912-3
 17. Fumihito Sato and Makoto Katori, Dirac equation with ultraviolet cutoff and quantum walk, *Phys. Rev. A*, 査読有, **81**, 2010, 012314/1-10, DOI: 10.1103/PhysRevA.81.012314
 18. 香取眞理, 種村秀紀, 非衝突過程・行列値過程・行列式過程, *数学*, 査読有, 61(3), 2009, 225-247, URL: <http://mathsoc.jp/publication/sugaku/>
 19. Makoto Katori and Hideki Tanemura, Zeros of Airy function and relaxation 2009, 1177-1204, DOI: 10.1007/s10955-009-9829-7
- [学会発表](計 25 件)
1. 香取眞理, 時間発展するランダム行列, 研究集会「第 21 回沼津研究会」, 2014 年 3 月 6-8 日, 沼津工業高等専門学校.
 2. 香取眞理, 行列式過程としてダイソン模型をどれだけ拡張できるか, 研究集会「無限粒子系, 確率場の諸問題 IX」, 2014 年, 1 月 11, 12 日, 奈良女子大学理学部数学教室.
 3. Makoto Katori, An elliptic extension of Dyson's Brownian motion, Workshop 'New Trends on Stochastic and Quantum Interacting Particle Systems', December 10, 2013, Department of Physics, University of Tokyo.
 4. Makoto Katori, Determinantal martingales and noncolliding diffusion processes, Workshop 'Spectra of Random Operators and Related Topics', December 5-7, 2013, Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University.
 5. Makoto Katori, Determinantal martingales and determinantal processes, Workshop 'Random Analytic Functions, Random Matrices, and Determinantal Processes', November 29, 2013, Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University.
 6. Makoto Katori, Determinantal martingales and correlations of noncolliding random walks, 12th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems,

- November 22, 2013, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo.
7. Makoto Katori, Conformal martingale representations of log-gases, 25th UIPAP International Conference on Statistical Physics, July 23, 2013, Seoul, Korea.
 8. Makoto Katori, Complex Brownian motion representation of the Dyson model, Kansai Probability Seminar Extended, April 19, 2013, Faculty of Science, Kyoto University.
 9. Makoto Katori, Complex Brownian motion representation and Eynard-Mehta-type correlation kernel, Workshop 'Determinantal processes and related topics', March 11,12, 2013, Technische Universitat Munchen, Germany.
 10. Makoto Katori, Determinantal formula appearing in non-determinantal process, Workshop 'Spectra of Random Operators and Related Topics', December 5-7, 2012, Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University.
 11. Makoto Katori, Vicious Brownian motions, entire functions, and quantum Toda lattice, Workshop 'Novel Development of Statistical Physics', December 4, 2012, Koshiba Hall, University of Tokyo.
 12. 香取眞理, System of complex Brownian motions associated with the 0' Connell process, 研究集会「無限粒子系, 確率場の諸問題 VIII」, 2012年10月20,21日, 奈良女子大学理学部数学教室.
 13. Makoto Katori, Vicious Brownian motion, 0' Connell's process, and equilibrium Toda lattice, EPSRC Symposium Workshop on 'Interacting Particle Systems, Growth Models and Random Matrices', March 19-23, 2012, Mathematics Research Centre, University of Warwick, UK.
 14. 香取眞理, 条件付ブラウン運動・SLE・ランダム行列・量子戸田格子, 研究会「行列模型とその周辺」, 2012年2月20日, 立教大学理学部.
 15. Makoto Katori, Introduction to stochastic Loewner evolution, 物性研究所理論セミナー, 2012年1月13日, 東京大学物性研究所.
 16. Makoto Katori, Vicious Brownian motion with Toda lattice potential and 0' Connell process, Workshop 'Spectra of Random Operators and Related Topics', December 1-3, 2011, Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University.
 17. Makoto Katori, On Matsumoto-Yor process and 0' Connell process, 研究集会「無限粒子系, 確率場の諸問題 VII」, 2011年10月16日, 奈良女子大学理学部数学教室.
 18. Makoto Katori, Symmetries and structures of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion processes (10 hours), Ecole de Physique des Houches (Les Houches Physics School), 'Vicious Walkers and Random Matrices', May 16-27, 2011, Les Houches, France.
 19. 香取眞理, 非衝突ブラウン運動・ランダム行列・整関数, 第9回岡シンポジウム, 2010年12月4, 5日, 奈良女子大学理学部数学教室.
 20. 香取眞理, Stochastic Loewner Evolutions and Statistical Mechanics, 第53回函数論シンポジウム, 2010年11月21-23日, 名城大学サテライト.
 21. Makoto Katori, Determinantal processes and entire functions, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2010年9日10日, 大阪千里ライフセンタービル.
 22. Makoto Katori, Entire functions and relaxation processes of infinite particle systems, Conference on 'Probability and Stochastic Processes', November 26-28, 2009, Indian Statistical Institute, New Delhi, India.
 23. Makoto Katori, Zeros of entire functions and relaxation processes, VIIIth Symposium 'Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems', October 7-9, 2009, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo.
 24. 香取眞理, 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution, Summer School 数理物理 2009, 2009年8月27-30日, 東京大学大学院数理科学研究科.
 25. Makoto Katori, Zeros of Airy Function and Relaxation Process, International Conference 'Selfsimilar Processes and their Applications', July 20-24, 2009, Angers, France.
- [図書](計2件)
1. 伊藤清企画・監修, 渡辺信三, 重川一郎編, 丸善, 「確率論ハンドブック」, 2012年, 579ページ; 第11章 確率論と数理物理, 11.4 SLE (Schramm-Loewner Evolution) 白井朋之, 香取眞理, pp.443-450.
 2. 香取眞理, 裳華房, 「統計力学」, 2010年, 241ページ.
- [その他]
ホームページ等
<http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

香取 眞理 (KATORI, Makoto)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：60202016