

機関番号：32689

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2009~2011

課題番号：21540399

研究課題名 (和文) ハミルトン系カオスの多重エルゴード運動と無限測度エルゴード系の
大偏差特性の決定研究課題名 (英文) Multi ergodicity in nearly integrable Hamiltonian systems and large
deviation properties of infinite ergodic systems

研究代表者

相澤 洋二 (AIZAWA YOJI)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70088855

研究成果の概要 (和文)：

ハミルトン系カオスの研究はポアンカレ以来の長い歴史をもつが、近年では非常に緩い変動を生み出すメカニズムの解明に向けて世界的な関心が高まっている。本研究では、ハミルトン系 (特に高次元系) の軌道の拡散過程が生み出す異常な挙動から、数値計算及び理論計算によってスケール則を明確に導き出すことに挑戦した。これによって、アーノルド拡散の中に、無限測度エルゴード性が内蔵されていること、さらに対数拡散 $\langle n^2 \rangle \sim (\log n)^\beta$ が出現すること、さらにカオスとトーラスの境界領域におけるいくつかの普遍的性質を初めて明らかにした。

次にこれらの結果は従来の研究で指摘されていた多くの事実とも整合性がとれていることを明らかにできた。例えば、ゆらぎのスペクトルが $f^{-\nu}$ であること、およびアーノルド拡散の特性時間 (ネコロシエフ時間) の分布が対数ワイブル則に従うことや無限測度系の緩和の理論などが本研究の結果から確認できたことは大きな収穫であった。無限測度エルゴード定理を基礎においてハミルトン系の **slow dynamics** を解明しようとする研究は我々のグループが最初であるが、この意味でも大きな貢献ができたと思っている。

無限測度エルゴード性の普遍性の側面から見ると、本研究の成果はハミルトン系に限らず、多くの散逸力学系に発生する **slow dynamics** の理解にも大きく貢献することが期待できる。**Strange Nonchaotic Attractor (SNA)** が示す異常拡散と大偏差特性がハミルトン系のそれと同じ解析で導かれることも示され、次の研究へと繋がる成果であった。また、ヘテロクリニック乱流 (偏微分系) の強い間欠性が示す **slow dynamics** にも類似の異常大偏差特性が発見できたことにより、散逸系も含めた新たなエルゴード理論への展開を十分に準備することができ、有意義な成果を上げることができた。なお、まだ出版されていない成果については、順次論文にして公開してゆく予定である。

研究成果の概要 (英文)：

In the present works, we have challenged to derive the scaling law of the orbital diffusion (Arnold diffusion) in high dimensional Hamiltonian systems, and succeeded to obtain the log-diffusion as well as the sub-diffusion in the interface layer between the invariant torus and chaos in a typical Hamiltonian system (Froeschle's model). Furthermore, it was proved these results can be theoretically formulated by use of the infinite ergodic theorem (DKA theorem), which is applicable to the Arnold webs in the nearby integrable Hamiltonian cases. From this theoretical result, we have succeeded to understand systematically the various aspects of slow dynamics in Hamiltonian systems, for instance, $1/f$ spectral fluctuations and the log-Weibull distribution function for the Nekholoshev time, which are closely connected to a universal distribution function (the Mittag-Leffler distribution) for the large deviation property of scaled average

fluctuations. We have also succeeded to extend the DKA theorem to elucidate the detailed measure theoretical structure hidden behind the infinite ergodic phenomena in Hamiltonian systems, for instance, the fine structure of phase space (Mushroom billiard system) with a fractal scaling and the apparent attenuation in the transient regime between torus and chaos in nearby integrable systems. All these results are independent and new ones that stimulate the future development of the ergodic theoretical studies not only in Hamiltonian dynamics but also in the dissipative dynamics. Indeed, Strange-Nonchaotic Attractors and Heteroclinic turbulence reveal the same type of slow dynamics as these mentioned in our present works.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：非平衡・非線形物理学

1. 研究開始当初の背景

ハミルトン系カオスの研究はポアンカレ以来の長い歴史をもつが、近年では非常に緩い変動を生み出すメカニズムの解明に向けて世界的な関心が高まっている。ハミルトン系が示す slow dynamics の背景に無限エルゴード性と共通の非定常性があることが近年の我々のグループの研究の進歩によって明らかになってきた。無限エルゴード性の Darling-Kac-Aaronson の定理とハミルトン系の Arnold 拡散を結びつける理論を構築できる状況にある。その為には、異常拡散のスケール則の決定と DKA 定理の拡張に挑戦する必要があり、我々は相空間の微細構造の探究からこの問題に取り組む計画を進めた。

2. 研究の目的

本研究では、無限エルゴード性の新たな普遍的統計法則を探索するとともに、ハミルトン系の異常ゆらぎの原因解明にむけて理論及び計算機シミュレーションの両面から取り組む。ハミルトン系のトーラス近傍の淀み時間分布は、一様測度が自明な不変測度であるにもかかわらず、特別な無限測度エルゴード系から導かれる対数ワイブル分布と一致

する。本研究では、ここに現れる「一様」と「無限」という一見すると相対する測度論的構造がどのように結びつくかについて、適宜モデルを構成しながら明らかにする。さらに、そのモデルにおける大偏差特性やゆらぎ特性についてもその過渡挙動を含めて理論的に解明するとともに、カオスとトーラスの境界での新たな微細構造を明らかにする。これらは無限エルゴード性の理解を一層深めてゆく上で欠かせない目標である。

3. 研究の方法

ハミルトン系のトーラス-カオス構造と一様不変測度を一次元に抽象化したモデルを考え、中立的不動点（トーラスのモデル）近傍の軌道の滞在時間分布、空間のコンパクト性および無限性に注目してモデルを分類する。理論的には測度論的手法と併せて更新解析を行うとともに数値解析をし、大偏差・ゆらぎ特性を明らかにする。さらに、一次元系を二次元系に拡張するエルゴード論的方法 (natural extension) を用いて二次元面積保存写像を構成し、無限エルゴード系との関係を明らかにする。その場合、Darling-Kac-Aaronson 定理が仮定する観測関数の性質を満たさないことが大きな障壁であるが、相平

均 α が0の場合を考えた笠原による Darling-Kac の拡張定理をヒントに、ここでは特別な観測関数を考える。そして、更新理論を用いた解析と数値解析により、無限エルゴード系に駆動される拡散を明らかにする。次に、反発的特異不動点をアトラクターにもつ力学系を構成し、その軌道の振る舞いと分布すなわち大偏差特性を数値計算と理論計算から明らかにする。最後の例では、トーラス・カオス棲み分け境界を持つ摂動マッシュルーム系のトーラス近傍領域に着目し、そこでの軌道の待ち時間の統計則を厳密な待ち時間分布の理論曲線による評価と計算機実験から明らかにする。

4. 研究成果

(1) 対数ワイブル則に由来する 1-stable law と just $1/f$ ゆらぎの結果

Lambert W 関数を用いることで、コンパクトな空間上で対数ワイブル則と一様不変測度が漸近極限で両立する一次元モデルを導出した。更新解析および数値解析から、このモデルは 1-stable law という新しい大偏差特性をもつことが明らかになった。さらに、軌道のゆらぎ特性はモデルのパラメータによらずに just $1/f$ ゆらぎを示すことがわかった。これらはハミルトン系カオスで観測される $1/f$ ゆらぎの起源がトーラス近傍の対数ワイブル則と測度論的構造にあることを強く支持する結果であり、今後の課題となるアーノルド拡散の解明に向けて大きな基礎となった。高次元への拡張としては、同型変換と natural extension というエルゴード論的手法を用いることで、典型的な一次元無限エルゴード系である変形ベルヌイ写像から導かれる二次元面積保存写像が存在することを示した。さらに、陽に厳密に解ける場合を例に数値解析をした結果、観測する自然測度は空間的に一様でありながらも、無限エルゴード定理を反映して時間的には Mittag-Leffler 分布にしたがってランダムに変動することが明らかになった。分岐の結果をまとめて図 1 に整理しておく。

以上の結果は、一様不変測度をもつハミルトン系と無限エルゴード性が両立することを理論的に示したものであり、「ハミルトン系は無限エルゴード性を内蔵している」という我々の着想の数理的側面を明らかにしたものであった。さらに、スキュー・プロダクト系としてのランダム力学系との関係も明らかになり、ハミルトン系・無限エルゴード系・ランダム力学系の三者が相互に関係しながら測度論的につながる可能性を強く示唆することになった。

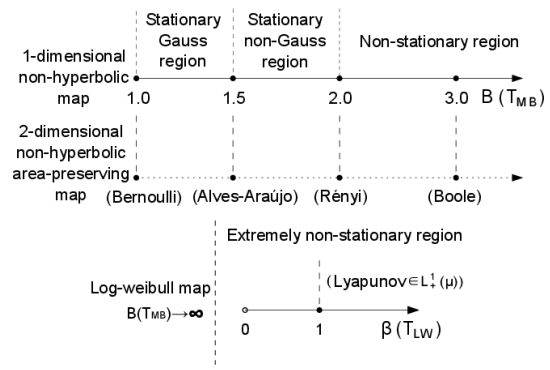


図 1 無限エルゴード系、一様不変測度をもつ系、及び二次元面積保存写像系における各パラメータの関係

(2) 無限エルゴード系に駆動される拡散の結果

更新解析の結果、観測関数が導く確率的変位が二次モーメントをもてば、中心極限定理と無限エルゴード性に由来する再帰特性が安定分布にしたがうことから、指数 $\alpha/2$ ($0 < \alpha \leq 1$) の両側 Mittag-Leffler 分布が極限分布になることが明らかになった。また、その平均二乗変位は n^α に比例し sub-diffusion であり、その拡散係数の分布も決定することができた (図 2)。さらに、ハミルトン系と関係する対数ワイブル則をもつような無限エルゴード系を考えると、その拡散は $(\log n)^{1/\beta}$ ($\beta > 0$) に比例することがわかった。

この結果は、無限エルゴード性を内蔵するハミルトン系に対するアーノルド拡散を解明することに向けて、sub-diffusion、もしくは、log-diffusion を一つの指針とする基礎となった。

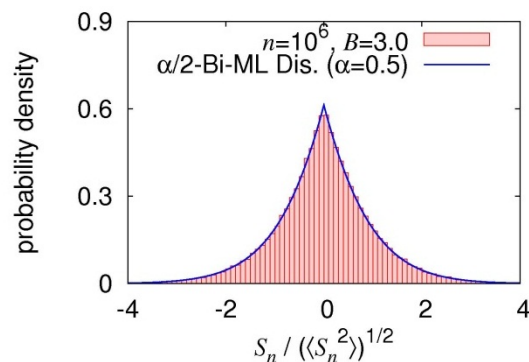


図 2 相平均が 0 の観測関数の極限分布 (赤) と両側 Mittag-Leffler 分布 (青線)

(3) 反発的特異不動点をアトラクターにもつ無限測度力学系の緩和特性の結果

図 3 に示した写像は卵型スタジアムビリヤ

一ド系の淀み層から数値的に取り出され、理想化された一次元写像である。この写像の反復 $T^n(x)$ は、ほとんどすべての初期点 x で原点 0 に指数関数的に収束する(図4)。すなわち、原点 0 はこの力学系のアトラクターである。しかし、このアトラクターは反発的な特異不動点でもある(近傍での微分の絶対値が 1 より大きく、その点では発散する)。このような性質をもつ力学系のクラスに測度論的数論における Balkema-Oppenheim 写像(BO 写像)があるが、図3の例は含まれない。そこでBO 写像を拡張し、図3の例を含む広いクラスの一次元写像力学系を構成した。これにより今まで個別的に扱われてきた広いクラスの過渡挙動が理論的に扱えるようになる。

構成された拡張BO 写像のクラスにおいて、マルコフ性を仮定すれば Vervaat がBO 写像に対して扱った手法が同様に適用でき、拡張BO 写像に対応したマルコフ連鎖を導くことができた。さらに、このマルコフ連鎖は、拡張BO 写像の包絡線の特徴付けられる一次元ランダム力学系と同様に振る舞うことを示すことができた。この理論解析によって、広いクラスの決定論的な過渡挙動が比較的単純なランダム力学系の解析に帰着できることがわかった。この事実は、過渡挙動に対するエルゴード定理と考えられ、新しいタイプの無限測度エルゴード理論の可能性を提示している点で非常に興味深く、現在も研究を続けている。

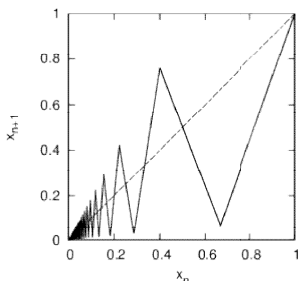


図3 卵型スタジアムビリヤード系から抽出、理想化された区分線形な一次元写像

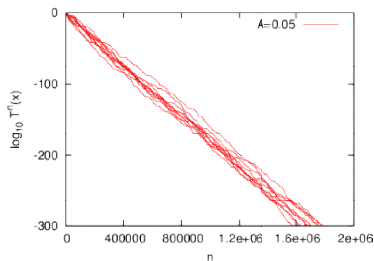


図4 ランダムに選んだ10点から始まる軌道(片対数プロットで指数関数的減衰を表す)
(4) ハミルトン系カオスに埋め込まれた過渡挙動の絶対連続不変測度の結果

卵型スタジアムビリヤード系から抽出さ

れた写像(図3)は指数関数的収束を示す過渡挙動であった。Aaronson, Meyerovitch によれば、一般に過渡挙動(散逸的な力学系)の絶対連続不変測度は無限測度であり、観測可能性に関わる“不変測度の一意性”が存在しない。そこで我々はこの場合の絶対連続不変測度を数値シミュレーションで観測した。その結果、不変測度は規格化できない無限測度であり、原点での発散は普遍的に $\propto x^{-1}$ であることがわかった(図5)。このことは原点に収束する過渡挙動にも関わらず、定常な分布を取り出そうとすると非常に大きな大偏差が現れてしまうことを意味する。上述の決定論的過渡挙動をランダム力学系へ帰着させる方法を用い、この密度関数 x^{-1} は、他のどんな指数関数的収束を示す過渡挙動に対しても現れることを理論的に示すことができた。さらに、この密度関数の詳細な形が $x^{-1}(\log 1/x)^{-1/2}$ であることも導くことが出来た。一方において、対応するランダム力学系には x^{-2} という不変密度関数も存在するはずで、“なぜ x^{-1} だけが選択されて観測されるのか”という選択則の決定については今後の重要な課題となっている。

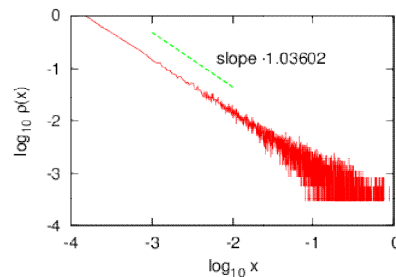


図5 図3の写像の絶対連続不変測度(傾き -1 は密度関数が $\propto x^{-1}$ であることを表す)

(5) ハミルトン系トーラス近傍の微細構造と異常分岐の結果

トーラスとカオスの境界が直線で棲み分けるマッシュルームビリヤード系に、部分的に誘電体を挿入した摂動マッシュルーム系を構成した。まず、トーラス近傍からの脱出時間を基にポアンカレ断面上に無限分割を構成し(図6)、さらにこれを用いてトーラス近傍の脱出時間分布 S_n が $S_n \sim n^{-\kappa}$ ($\kappa = -1, -2$)なる異なる2つのスケール則を持つことを示した。

上の無限分割の性質をもとに、より一般のハミルトン系の淀み層の構造に近くなるように最外殻トーラスの回転数がフィボナッチ数列に従って無理数に漸近するマッシュルーム系を構成した。この系について最外殻トーラス近傍の淀み運動を脱出時間分布に

より評価した結果、最外殻トーラスが無理回転に近づきフィボナッチ数 ($k=15$) を超えるとべき関数的な軌道の補足は失われることを理論・数値実験共に示した (図 7)。さらに、トーラス近傍ではなくカオス領域の 5 つの不変集合周辺にのみ淀み層が存在することを示した (図 8)。

以上の複雑な分岐は、これまで全く知られていなかったトーラス崩壊の描像を与えるもので一層の理論研究に現在取り組んでいる。

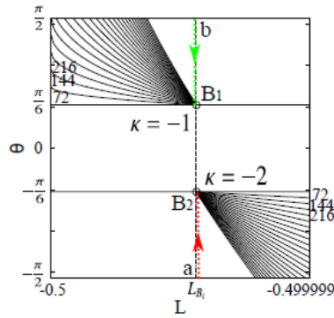


図 6 誘電体マッシュルームビリヤード系のトーラス近傍に構成した無限分割 (数字はトーラス近傍から脱出する時間)

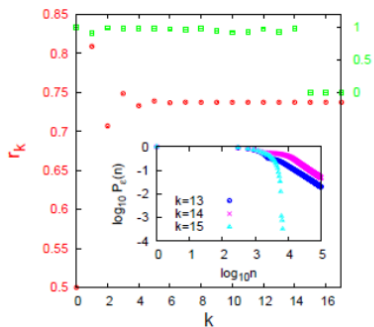


図 7 フィボナッチ数 k に対する長方形領域の長さ r_k とサバイバル確率 $P_e(n)$ のべき指数 δ

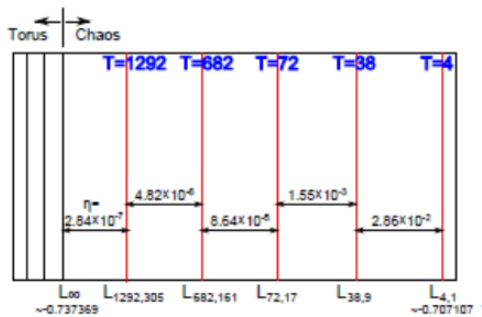


図 8 カオス領域の 5 つの不変集合 (T は不変集合上の軌道の周期)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

1. S. Tsugawa and Y. Aizawa, Stagnant Motion in Chaotic Region of Mushroom Billiard System with Dielectric Medium, *J. Phys. Soc. Japan*, **81**, 064004 (2012). (査読有)
 2. S. Shinkai and Y. Aizawa, 1/f Spectrum and 1-Stable Law in One-Dimensional Intermittent Map with Uniform Invariant Measure and Nekhoroshev Stability, *J. Phys. Soc. Japan*, **81**, 024009 (2012). (査読有)
 3. K. Orihashi and Y. Aizawa, Global aspects of turbulence induced by heteroclinic cycles in competitive diffusion Lotka-Volterra equation, *Physica D*, **240**, 1853-1862 (2012). (査読有)
 4. Y. Aizawa, Foundations of earthquake statistics in view of non-stationary chaos theory, *物性研究*, **97**, 309-317 (2011). (査読有)
 5. T. Mitsui and Y. Aizawa, Intermittency Route to Strange Nonchaotic Attractors in a Non-Skew Product Map, *Physical Review E*, **81**, 046210 (2010). (査読有)
- (他 7 件)

[学会発表] (計 34 件)

国際会議 (20 件)

1. Y. Aizawa, Empirical laws of earthquake statistics in view of chaos theory, “*DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS 2012*”, Hokkaido University (Sapporo), March 7, 2012.
2. S. Shinkai, Anomalous diffusion driven by infinite ergodic systems, “*DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS 2012*”, Hokkaido University (Sapporo), March 8, 2012.
3. M. Nakagawa, Ergodic theory of transient behaviors, “*DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS 2012*”, Hokkaido University (Sapporo), March 8, 2012.
4. S. Tsugawa, On the stickiness property of perturbed mushroom billiards, “*DYNAMICS OF COMPLEX SYSTEMS 2012*”, Hokkaido University (Sapporo), March 8, 2012.
5. Y. Aizawa, Non-stationary chaos revisited from infinite measure ergodicity, “*Weak Chaos, Infinite Ergodic Theory, and Anomalous*

- Dynamics*”, Max-Planck-Institute (Germany), August 1, 2011.
6. S. Shinkai, Some examples of 2-dimensional area-preserving infinite ergodic systems, “*Weak Chaos, Infinite Ergodic Theory, and Anomalous Dynamics*”, Max-Planck-Institute (Germany), August 2, 2011.
- (他 14 件)

国内発表 (14 件)

1. 中川正基, 相澤洋二, あるクラスの散逸エルゴード変換の過渡挙動と絶対連続な不変測度, 日本物理学会第 67 回年次大会 (関西学院大学) 2012 年 3 月.
 2. 津川暁, 斎藤史洋, 相澤洋二, 地震の発生間隔分布とマグニチュード分布を結合するカオスマデルの構成と普遍定数の導出, 日本物理学会第 67 回年次大会 (関西学院大学) 2012 年 3 月.
 3. 杉山功敏, 新海創也, 相澤洋二, 非定常写像力学系における無限エルゴード性に由来する異常拡散, 日本物理学会第 67 回年次大会 (関西学院大学) 2012 年 3 月.
 4. 古賀恭平, 津川暁, 相澤洋二, 確率分岐に伴う無限測度と Multiplicative noise 効果, 日本物理学会第 67 回年次大会 (関西学院大学) 2012 年 3 月.
- (他 10 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

相澤 洋二 (AIZAWA YOJI)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70088855

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

新海 創也 (SHINKAI SOYA)
神戸大学大学院・システム情報学研究科
・学術研究員
研究者番号：60547058