

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月25日現在

機関番号：26402

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540402

研究課題名（和文）エキゾチックな量子ホロノミの数理と物理

研究課題名（英文）Mathematical physics of exotic quantum holonomy

研究代表者

全 卓樹（ZEN TAKUSU）

高知工科大学・環境理工学群・教授

研究者番号：60227353

研究成果の概要（和文）：量子系のパラメータを周回させるとき、系の固有状態が元の状態に回帰せず別の固有状態に移行する現象を新奇量子ホロノミと称する。新奇量子ホロノミのゲージ場理論を創り上げ、これが従来から知られていた量子位相のホロノミ、すなわちベリー位相の理論の拡張として、同一の枠内で理解出来ることを示した。また新奇量子ホロノミの出現を、パラメータの例外点、即ち虚数パラメータ値におけるゲージ場の特異点の存在と関連付けて理解出来ることを示した。また多量子順位系において新奇量子ホロノミが発現する例を階層的構成法によって組織的に生成出来る事を示した。さらに磁場の貫通する輪状一次元空間を運動する粒子について、断熱近似の成立しない磁場強度の時間的変化に対しても新奇ホロノミが観測される事を理論的に示した。

研究成果の概要（英文）：

The exotic quantum holonomy refers to the anholonomy of quantum states other than that of the quantum phases. It involves the exchange of eigenstates after the cyclic variation of system parameters. We have created a gauge theoretical formulation that describes both the exotic and conventional quantum holonomy, the Berry phase, in a unified fashion. It has enabled the discovery of exceptional points located at the complexified parameter value which act as branching points of the eigenenergies, and cause the exotic anholonomy along the real axis of the parameter space. It has also helped us systematically construct quantum systems with exotic anholonomy among multi-level eigenstates. In a system of a particle on Aharonov-Bohm ring, the exotic quantum holonomy has been shown to exist for non-adiabatic cyclic variation of the strength of the magnetic field.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、数理物理・物性基礎

キーワード：量子力学、量子制御、断熱過程、固有順位、時間周期系

1. 研究開始当初の背景

量子ホロノミ、すなわち量子系における非ホロノミ現象の研究は、ベリー位相、更にはその縮退系への拡張であるヴィルチェック＝ジーのホロノミとして、すでに30年近い歴史を有する。ところがパラメータの周回に伴って位相の変化のみでなく固有状態の入れ替えが起こる「新奇量子ホロノミ」の存在することが、一般化された点状相互作用をもつ一次元系において10年ほど前に筆者により指摘されていた。

量子系を如何にしてマクロに制御するかは、現代量子論の主要な課題の一つであり、新奇量子ホロノミが量子系のパラメトリックな制御の自然な手段を与える事は明白である。

先述の点状相互作用のある一次元系の例は長らく単なる奇妙な孤立例と考えられてきたが、数年前に田中と宮本により、類似の新奇量子ホロノミ現象が、時間周期的な一次元量子系の擬固有エネルギーにおいても存在している事が発見された。この新しい例は（あ）解析が容易であり（い）一般化が見込まれ（う）レーザーにより周期的に励起された原子系としての実現可能性がある、の3つの特徴をもち、新奇量子ホロノミ現象の組織的な研究を可能にするように見受けられた。我々はこれを、量子ホロノミの総合的な研究の機が熟したものを捉えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は「新奇量子ホロノミ」を統一的な視点から理論的に解明する事であった。姉妹現象であるベリー位相がパラメータ空間上のゲージ場を用いて記述されるのと同様に、新奇量子ホロノミも類似のゲージ場を持って記述され得るのではないかという想定を出発点に、新奇量子ホロノミと従来のベリー位相を統一的に記述し理解する事を目指した。

新奇量子ホロノミにあってはパラメータの周回変化が量子的固有順位の入替えを齎す事から、これは量子状態をパラメトリックに操作する事につながり、更にはホロノミックな量子計算にも転用可能なことが考えられ、新奇量子ホロノミはベリー位相現象にも増して応用上有用である事も考えられる。そこで新奇量子ホロノミを示す系をより組織的に発掘していく事が重要であり、これも本研究の目的の一つであった。

量子ホロノミ現象は、そのボルン＝オッペン

ハイマ理論的な出地からして、系の変数を「早い変数」と「遅い変数」に分離する事にその基礎をおいており、それによって「遅い変数」を「断熱的に変化するパラメータ」として考察する事が可能になるのである。一方そこで見つかった現象が断熱近似を越えた「非断熱的」変化においても広く適用される場合があり、ベリー位相に関してはこれがアハロノフ＝アナンダン位相であることはよく知られている。応用の観点からもこのような非断熱過程への拡張は貴重である。それ故「非断熱的な新奇量子ホロノミが存在するか」を探る事は重要な問題であると考え、これについて調べることにした。

3. 研究の方法

これまで知られている新奇量子ホロノミを示す系のうちで、田中＝宮本の「kicked spin 1/2 system」は、その模型の簡明性と解の解析性に起因する見通しの良さから、詳しい研究に適していると考えられた。そこでまずはこの系の特徴を調べ、更にスピン 1/2 を 3/2 更には一般の半奇数スピンに拡張出来るかを調べることから始めた。

ベリー位相の理論的理解の鍵は「ミード＝ベリーのゲージ接続」、すなわち、状態ベクトルとそのパラメータ微分とのスカラー積であった。さらにヴィルチェック＝ジーのM重縮退系の量子ホロノミにあっては、縮退を構成するM個の状態の任意の二つを組み合わせで造ったM²個のミード＝ベリー接続が構成出来、この全体がホロノミ現象を記述する。

新奇量子ホロノミにおいてこれの類似物を考えると、必然的に系のヒルベルト空間を構成する全基底ベクトルが動員されることになる。即ち系の次元をNとすれば、N個の固有状態全てを二つずつ組み合わせで造るN²個の「非アーベリアンな」ミード＝ベリー接続が新奇量子ホロノミの記述に用いられる事が想定されるのである。そうすると中心的な問題は、このN²のゲージ接続から如何なる構成によってパラメータ周回後の状態の相互点かを記述するかという事になる。

更に一旦現象を正しく記述するゲージ接続の組が同定されると、これからいかにして「ゲージ不変量」を抽出するかを調べる事が重要となる。なぜならば観測にかかるべき物理量は、ゲージ変換（この場合は各固有状態の位相の任意の付け替え）に依存する事がないからである。

研究に当たっては主に手計算を主体とした

解析的な手法によってパラメータの関数としてのモデル系の固有値を求め、そこからゲージ接続を求めた。モデルをスピン 1/2 から少しでも複雑にすると必要とされる計算が途端に複雑になり、そのため解析計算プログラムを頻繁に用いる必要が生じた。さらには往々にしてミード=ベリー接続の解析解は求まらず、数値的な手法を用いることとなった。場合によってはこの計算は大規模になり、手持ちの計算機で数時間計三時間を要する事もあったが、この場合も全て解析計算プログラムを用いて行う事が可能であった。

4. 研究成果

研究成果は4つに纏めることができる

① 量子ホロノミのミードベリーゲージ接続による統一的理解の達成

よく知られているようにベリー位相は、状態のパラメトリック微分と状態自身の内積から造られるミード=ベリーのゲージ接続の時間順序周回積分を用いて書かれ、これは系のゲージ変換不変量になっている。我々はこれを一般化して、ベリー位相に加えて新奇量子ホロノミが存在する場合にも適用可能な量子ホロノミの一般式を発見した。N次元ヒルベルト空間の物理系においては、N個の初期固有状態とそれらのパラメータの断熱的周回後の移行先状態との N^2 個の内積全体からなるホロノミ行列を考えれば、それが量子ホロノミを記述することになる。論文⑭、⑮において、我々はこのホロノミ行列が非アーベリアンな N^2 個のミード=ベリーのゲージ接続全体からなる行列の二種類の時間順序周回積分の積（行列そのものの積、および対角要素のみからなる行列の積）で与えられることを示した。積の各要素はゲージ依存性をもつが積全体ではゲージ共変となっている。いくつかの実例によって我々の得た公式の正さの傍証もおこなった。これは本研究の主要な成果である。

② 田中=宮本モデルの高スピンへの拡張

上記の量子ホロノミ行列のゲージ接続を用いた一般公式を傍証するために、論文⑭、⑮において、スピン 1/2 に時間周期的な δ -kick を加える田中=宮本モデルの拡張として、スピン 3/2 でパラメータの全ての値について二重縮退のあるモデルを考案した。このモデルではスピン 1/2 におけるパウリ行列に代えて、四元数代数を満たす5つのユニタリーかつエルミートな 4×4 行列が用いられる。このモデルも解析的な解をもち、ここではベリー位

相、ヴィルチェック=ジーホロノミ、そして新奇量子ホロノミの3種類が渾然一体となって現れる。

③ 新奇量子ホロノミ発生の鍵としての複素パラメータ空間上での例外点の発見

新奇量子ホロノミの数学的構造を理解するために、田中=宮本モデルのパラメータを複素数に拡張して、論文⑨において、複素空間上での系の擬固有値の振る舞いを見た。複素空間のなかに「例外点」と呼ばれる特別なパラメータ値があり、そこでは系の二つのレベルが縮退していることが見つかった。例外点からブランチカットが出ており、擬固有値の実部、虚部双方にとって例外点は自乗根型の分岐点になっている事が判り、これがパラメータが実軸上を辿って元の値に戻る時の固有値間の移行の「説明」を与えている事が見て取れる。例外点においてベリーミードのゲージ接続の値は発散すし、これから見ても例外点がベリー位相における実値上の縮退点である「悪魔点」と類似の意味を占めていると考える事が出来る。

④ 階層的な構成による多順位新奇量子ホロノミの発見

新奇量子ホロノミが二レベルや四レベルの特殊な系の性質ではなく、より遍在するものである事を示すために、我々は論文②において、断熱的パラメータ周回によって全てのレベルが他へと移行する 2^n レベル (n は任意の正の整数) の量子系を構成した。この構成は

(あ) 田中=宮本モデルを1キュービット量子状態にユニタリに作用する「量子回路」として理解する
(い) これを n キュービット状態に対して再帰的に適用するという操作によって行われた。①で述べられた量子ホロノミの一般論がこの系にも適用されることが示された。ゲージ共変なホロノミ行列からゲージ不変量を抽出する操作が考案され、その結果得られるゲージ不変量が「off diagonal quantum holonomy」現象で得られていた「マニーニ=ピストレシの位相」と物理的に同等であることが示された。

⑤ アハロノフ=ボーム輪状量子系における非断熱的な新奇量子ホロノミの発見

断熱近似を越えた「有限速度」のパラメータ変化でも、ベリー位相の概念が本質的に有効である事が、アハロノフとアナンダンによって示されている。果たして同様な議論が新奇量子ホロノミについても可能だろうか。断熱近似を越えた量子ホロノミの一般的な理論

を作ることは現時点では達成出来なかった。そこで非断熱的な状況でも新奇量子ホロノミ現象が継続して存在し続けている例を探した結果、磁場に貫かれた円環状の一次元空間上で量子粒子の運動を考える「アハロノフ＝ボーム系」においてそのようなものが発見され、結果を論文⑧に公表した。この系において

(あ) 磁場の強さについて系の物理的性質が周期的であり、それ故磁場強度の単調増加を系のパラメータの周回と看做せる

(い) このパラメータの周回に対して系の固有エネルギーが順次一つ隣のものに移行し、系は新奇量子ホロノミを示す

(う) ゲージ接続に基づく一般論が(解析的計算には多大の労力を要するものの)この系でも適用出来る

ことが解り、さらに

(え) パラメータの周回を考え、これを有限に保っても固有エネルギーの隣接エネルギーへの移行が継続する

という事実を解析的に示すことが出来た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① O. Turek, T. Cheon, Quantum graph vertices with permutation-symmetric scattering probabilities, Phys. Lett. A 375 (2011) 3775-3780 [査読有].
- ② A. Tanaka, S.W. Kim, T. Cheon, Eigenvalue and eigenspace anholonomies in hierarchical systems, Europhys. Lett. 96 (2011) 10005(7pp) [査読有].
- ③ T. Cheon, P. Exner, O. Turek, Inverse scattering problem for quantum graph vertices, Phys. Rev. A 83 (2011) 062715(4pp) [査読有].
- ④ T. Cheon, P. Exner, O. Turek, Tripartite connection condition for quantum graph vertex, Phys. Lett. A 375 (2010) 113-118 [査読有].
- ⑤ T. Cheon, T. Takahashi, Interference and inequality in quantum decision theory, Phys. Lett. A 375 (2010) 100-104 [査読有].
- ⑥ T. Cheon, Short-range interaction in three-dimensional quantum mechanics, Phys. Lett. A 374 (2010) 4585-4588 [査読有].
- ⑦ T. Cheon, O. Turek, Fulop-Tsutsui interactions on quantum graphs, Phys. Lett. A 374 (2010) 4212-4221 [査読有].
- ⑧ A. Tanaka, T. Cheon, Quantum anholonomies in time-dependent Aharonov-Bohm rings Phys. Rev. A 82 (2010) 022104(6pp) [査読有].
- ⑨ S.W. Kim, T. Cheon, A. Tanaka, Exotic quantum holonomy induced by degeneracy

hidden in complex parameter space, Phys. Lett. A 374 (2010) 1958-1961 [査読有].

⑩ T. Cheon, P. Exner, O. Turek, Approximation of a general singular vertex coupling in quantum graphs, Ann. Phys. (NY) 325 (2010) 548-578 [査読有].

⑪ T. Cheon, A. Tanaka, S.W. Kim, Exotic quantum holonomy in Hamiltonian systems, Phys. Lett. A 374 (2009) 144-149 [査読有].

⑫ T. Cheon, P. Exner, O. Turek, Spectral filtering in quantum Y-junction, J. Phys. Soc. Jpn. 78 (2009) 124004-(7pp) [査読有].

⑬ A. Tanaka, T. Cheon, A unified theory of quantum holonomies, Ann. Phys. (NY) (2009) 324 1340-1359 [査読有].

⑭ T. Cheon, A. Tanaka, New anatomy of quantum holonomy, Europhys. Lett. 85 (2009) 200001(5pp) [査読有].

[学会発表] (計 5 件)

① Turek Ondrej, 全卓樹「等透過量子グラフ逆散乱と拡張交代行列」日本物理学会, 2011年9月23日, 富山

② T. Cheon, “Reflectionless and Equiscattering Quantum Graphs”, International Conference on Quantum Nano and Micro Technologies 2011, 2011年8月22日, Nice, France

③ 全卓樹, 田中篤司「Exotic quantum holonomy in Aharonov-Bohm systems」日本物理学会, 2010年9月26日, 大阪

④ Y. Hasebe, T. Cheon Quantum Star Graphs and Spectral Branching Filter, International Conference on Quantum Nano and Micro Technologies 2010, 2010年2月11日, St. Maarten, Netherlands Antilles

⑤ T. Cheon, “Duality in quantum graphs”, RIMS Workshop on Duality and Scale in Quantum Sciences 2009年11月4日, 京都

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

http://ResearchMap.jp/T_Zen/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

全卓樹 (ZEN, TAKUSU)

高知工科大学・環境理工学群・教授

研究者番号: 60227353