

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月21日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21560068

研究課題名（和文） 逐次部分最適化に基づく大規模凸計画問題の高速解法の開発

研究課題名（英文） Development of Fast Solution Methods based on Sequential Partial Optimization for Large Scale Convex Programming Problems

研究代表者

高橋 規一（TAKAHASHI NORIKAZU）

九州大学・大学院システム情報科学研究院・准教授

研究者番号：60284551

研究成果の概要（和文）：線形計画問題，凸2次計画問題等の基本的な連続凸計画問題に対する逐次部分最適化アルゴリズムを開発し，大域収束性解析や数値実験によってそれらの特性や性能を評価した．また，情報通信工学の分野に現れる種々の最適化問題に対する理論解析や効率的解法の開発を行った．具体的には，非負値行列因子分解の効率的計算法，リカレントニューラルネットワークの最適設計法，複雑ネットワークのクラスター係数最大化，高速な合意形成のためのマルチエージェントネットワークの接続構造最適化等の課題について理論と数値実験の両面から考察し，多くの重要な成果を得た．

研究成果の概要（英文）：We developed sequential partial optimization algorithms for fundamental continuous convex programming problems such as linear programs and convex quadratic programs, and evaluated their characteristics and efficiency through global convergence analysis and numerical experiments. We also carried out theoretical analysis and development of efficient algorithms for various optimization problems arising in the field of information and communication technology. To be more specific, we studied research issues such as efficient computation methods for nonnegative matrix factorization, optimal design methods for recurrent neural networks, maximizing clustering coefficient of complex networks, and optimization of the topology of multi-agent networks for fast consensus, and obtained many important results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎、工学基礎

キーワード：凸計画問題，逐次部分最適化，非負行列因子分解，ニューラルネットワーク，最大流問題，複雑ネットワーク，クラスター係数，マルチエージェントネットワーク

1. 研究開始当初の背景

学習理論やパターン識別の分野では、大量の訓練サンプルから未知のパターンに対する識別規則を自動的に獲得することが主要な研究課題となっており、その代表的手法として Support Vector Machine (SVM) が知られている。SVM は統計的学習理論の第一人者 Vapnik らによって 1990 年代半ばに提案されたパターン識別手法であり、豊かな理論的背景と高い識別性能から最も優れた汎用パターン識別手法の一つとして多くの研究者を惹きつけている。SVM における識別規則の決定は、訓練サンプルと同じ個数の変数をもつ凸 2 次計画問題に定式化される。ところが、目的関数の 2 次項の係数行列が密であるため、訓練サンプルの規模が大きくなると結合行列の全要素を計算機のメモリに格納することができず、最適解を求めることが不可能になってしまう。この問題を解消するため、Osuna らは小規模な凸 2 次計画問題を反復的に解いて元の大規模凸 2 次計画問題の最適解を求める方法を提案した。その後、このアイデアに基づく解法が他の研究者によって続々に提案され、その一部は SVM^{light} や LibSVM 等のライブラリとして SVM 研究者や利用者間で広く利用されている。これら一連の解法は大規模問題を小規模問題に分割して解くことから分割法とよばれている。分割法は元々記憶容量の問題を解消するために提案された方法であるが、驚くことに、記憶容量が問題とならない規模の凸 2 次計画問題に対しても、しばしば既存解法よりずっと高速に最適解を求めることができる。この事実、大規模最適化問題に対する新しいアプローチとして、分割法が有力な候補であることを示している。

2. 研究の目的

SVM の学習における分割法の考え方を他の最適化問題に適用できれば、数理計画の分野に新しい流れを生み出すとともに、工学を始めとする多くの領域に応用が広がると期待される。以下では、全変数から少数の変数を選択してそれらに関する部分最適化問題を解く、という操作を反復的に行って元の問題の最適解を求める手法を逐次部分最適化とよぶ。本研究の目的は、代表的な連続最適化問題に対する逐次部分最適化アルゴリズムを開発し、理論と数値実験の両面からその性能を評価することである。またそれと同時に、情報通信工学の分野に現れる各種の最適化問題について、逐次部分最適化の適用可能性を検討し、問題に応じたアルゴリズムを開発する。

3. 研究の方法

はじめに、線形計画問題、凸 2 次計画問題、半正定値計画問題等の代表的な連続凸計画問題や他の連続最適化問題に対する逐次部分最適化アルゴリズムを開発し、大域収束性等の理論解析を行うとともに数値実験によってその特性や性能を評価する。次に、情報通信工学の分野に現れる最適化問題、具体的には、非負値行列因子分解、リカレントニューラルネットワークの設計、複雑ネットワークのクラスター係数最大化、高速な合意形成のためのマルチエージェントネットワークの接続構造最適化等について、逐次部分最適化の適用を試みる。

4. 研究成果

(1) 一般の線形計画問題に対する逐次部分最適化アルゴリズムを提案し、その大域収束性を理論と数値実験の両面から検証した。提案アルゴリズムでは、部分問題の解法に、最小添字規則が適用された単体法が用いられている。理論面での成果として、反復の過程で退化した実行可能基底解が一度も現れなければ提案アルゴリズムが有限回の反復で最適解に到達することを証明した。一方、退化が生じる場合については、大域収束性を理論的に証明することはできなかったが、数値実験の結果、すべての例題で最適解に収束しており、大域収束性が理論的にも成立すると予想される。証明は今後の課題である。

(2) 一般の凸 2 次計画問題について、許容解の探索と最適解の探索の両方に逐次部分最適化アルゴリズムを適用した 2 段階逐次最適化アルゴリズムを提案し、数値計算ソフト Scilab によって実装してその有効性を検証した。Scilab に組み込まれている関数 quapro による直接解法と、部分問題の解法に quapro を用いる逐次部分最適化アルゴリズムの計算時間を比較した結果、最高で 6 倍強の高速化が達成されることが判った。また、大域収束性の理論的な解析を行い、解の更新によって目的関数が減少するための十分条件を導出した。しかしながら、線形計画問題の場合と同様、大域収束性の理論的保証を与えることはできていない。

(3) 非負行列因子分解 (Nonnegative Matrix Factorization: NMF) のための有効な計算法として知られている Lee と Seung の乗法型更新の問題点を解決する修正乗法型更新を提案し、それらの大域収束性を理論的に証明した。NMF とは、与えられた非負行列を二つの非負行列の積によって近似することであり、信号処理や機械学習の分野における様々な

問題に適用されている。NMF は一般に二つの因子行列の要素を変数とする制約付き最適化問題として定式化される。制約条件は因子行列の非負性であり、目的関数にはユークリッド距離や各種のダイバージェンスによって定義される近似誤差が用いられる。Lee と Seung の乗法型更新は、目的関数が減少するように二つの因子行列を交互に更新するものである。彼らの更新では目的関数の単調非増加性を示すことしかできないが、提案法では目的関数の単調非増加性ととも各因子行列が最適化問題の停留点に収束することを理論的に保証することができる。

(4) 非負制約条件付き凸 2 次計画問題に対する Sha らの乗法型更新の問題点を指摘し、それを解決する修正乗法型更新を提案するとともに、その大域収束性を理論的に証明した。Sha らの乗法型更新は NMF に対する Lee と Seung の乗法型更新と同様に分数の形で表現されており、このため実行可能領域内のすべての点で連続であることが保証されない。本研究では、Sha らの更新式にわずかな修正を加えるだけで不連続性問題が解決され、また大域収束性も保証されることを示した。証明には Zangwill の大域収束定理を用いた。また、修正の影響を調べるために Sha らの乗法型更新と修正乗法型更新の両方を Scilab で実装して反復回数と計算時間を比較したところ、両者に大きな違いは見られなかった。

(5) 所望の信号処理を実現するリカレントニューラルネットワーク (Recurrent Neural Network: RNN) の最適設計手法について考察し、二つの成果を得た。一つ目は、セルニューラルネットワーク (Cellular Neural Network: CNN) が連結成分検出器として動作するためのセル間結合に関する十分条件を導出したことである。セル間結合をある値に設定すれば連結成分検出が行えることは以前から経験的に知られていたが、理論的根拠を与えたのは本成果が初めてである。二つ目は、与えられた 2 値ベクトル列を出力する RNN の設計が線形計画問題や凸 2 次計画問題に帰着できることを理論的に証明したことである。これにより大規模かつ複雑な RNN の設計を機械的に行うことができる。

(6) 直流電圧源、キャパシタ、非線形抵抗からなる非線形回路を利用してネットワーク最大流問題を実時間で解く方法が Sato らによって提案されている。多くの数値実験によって Sato らの方法の有効性は確認されているが、平衡点の一意性や収束性等に関する理論解析は不十分であった。そこで本研究では、Sato らの回路における非線形回路の特性を

少しだけ修正したものを考え、それがつねに唯一の平衡点をもち、任意の初期条件に対して回路の状態がその平衡点に漸近収束することを理論的に証明した。

(7) Watts と Strogatz によって導入されたクラスター係数は複雑ネットワークを特徴付ける重要な指標の一つである。本研究では、与えられた条件の下でクラスター係数を最大化する問題について考察し、いくつかの基礎的な成果を得た。まず、与えられた頂点数と辺数の下でクラスター係数を最大化する問題を考え、頂点数が 10 以下のクラスター係数最大グラフをすべて求めるとともに、頂点数が大きくかつ平均次数が 3 以上ならばクラスター係数の最大値が 1 に極めて近いことを明らかにした。次に、与えられた次数列の下でクラスター係数を最大化する問題を考え、2-switch とよばれるグラフ変換によるクラスター係数の変化分を陽に与え、この変換を逐次的に適用してクラスター係数を増加させる方法を提案した。さらに、いくつかの特徴的な構造を有するグラフに対し、それらにいかなる 2-switch を適用してもクラスター係数を増加させることのできないことを理論的に証明した。

(8) Olfati-Saber と Murray によって提案されたマルチエージェントネットワークの合意形成アルゴリズムにおいて、合意への収束速度はエージェント間の相互作用を表すグラフの代数的連結度によって決定される。本研究では、与えられた頂点数と辺数の下で代数的連結度を最大にするグラフを求める問題について考察し、いくつかの基礎的な成果を得た。まず、頂点数が 7 以下のすべての場合について、代数的連結度を最大にするグラフを求めた。次に、星グラフ、閉路グラフ、完全 2 部グラフ、正則グラフ等のグラフについて、それらが代数的連結度最大グラフであるための十分条件を導出した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Saki Koizuka, Norikazu Takahashi, Maximum clustering coefficient of graphs with given number of vertices and edges, *Nonlinear Theory and Its Applications*, IEICE 査読有, Vol.2, No. 4, 2011, pp. 443-457.
DOI: 10.1587/nolta.2.443
- ② Norikazu Takahashi, Global asymptotic stability of nonlinear circuits related to maximum flow problems,

Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 査読有, Vol.2, No.4, 2011, pp.432-442.

DOI: 10.1587/nolta.2.432

- ③ Norikazu Takahashi, Ken Ishitobi, Tetsuo Nishi, Sufficient conditions for one-dimensional cellular neural networks to perform connected component detection, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 査読有, Vol.11, 2010, pp.4202-4213. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2010.05.007

〔学会発表〕(計21件)

- ① 荻原幸之助, 深海竜也, 高橋規一, 星グラフに辺を加えたグラフの代数的連結度最大性について, 電子情報通信学会2012年総合大会, 岡山大学, 2012年3月21日.
- ② 片山慈朗, 高橋規一, 非負制約付き凸2次計画問題に対する修正乗法型更新アルゴリズム, 電子情報通信学会2012年総合大会, 岡山大学, 2012年3月20日.
- ③ 深海竜也, 高橋規一, 2-Switch近傍において最大クラスター係数をもつグラフについて, 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 九州大学, 2012年1月19日.
- ④ 日比亮太, 高橋規一, Nonnegative Matrix Factorizationのための修正乗法型更新アルゴリズムとその大域的収束性~ダイバージェンス最小化の場合~, 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 九州大学, 2012年1月19日.
- ⑤ Ryota Hibi, Norikazu Takahashi, A Modified Multiplicative Update Algorithm for Euclidean Distance-based Nonnegative Matrix Factorization and its Global Convergence, 18th International Conference on Neural Information Processing, Shanghai, China, November 14, 2011.
- ⑥ Tatsuya Fukami, Norikazu Takahashi, Controlling Clustering Coefficient of Graphs by Means of 2-Switch Method, 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Kobe, Japan, September 5, 2011.
- ⑦ Kohnosuke Ogiwara, Norikazu Takahashi, On Topology of Networked Multi-Agent Systems for Fast Consensus, 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Kobe, Japan, September 5, 2011.
- ⑧ 荻原幸之助, 高橋規一, ある種の正則グラフの代数的連結度極大性に関する一考察, 平成23年度電気関係学会九州支部連合大会, 佐賀大学, 2011年9月27日.
- ⑨ 深海竜也, 高橋規一, ある種のブロックグラフの次数保存クラスター係数極大性, 平成23年度電気関係学会九州支部連合大会, 佐賀大学, 2011年9月27日.
- ⑩ 日比亮太, 高橋規一, NMFに対する終了条件付き修正乗法型更新アルゴリズム, 平成23年度電気関係学会九州支部連合大会, 佐賀大学, 2011年9月26日.
- ⑪ 日比亮太, 高橋規一, Nonnegative Matrix Factorizationのための修正乗法型更新アルゴリズムとその大域的収束性~ユークリッド距離最小化の場合~, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 斜里町公民館ゆめホール知床, 2011年6月30日.
- ⑫ 深海竜也, 高橋規一, 次数保存2辺張り替えに基づくクラスター係数の制御, 電子情報通信学会2011年総合大会, 東京都市大学, 2011年3月14日.
- ⑬ 荻原幸之助, 高橋規一, グラフラプランの第2固有値を最大にする無向グラフ~平均次数が2以下の場合~, 電子情報通信学会回路とシステム研究会, 熊本大学, 2011年1月26日.
- ⑭ Norikazu Takahashi, Global Asymptotic Stability Analysis of Nonlinear Circuits for Solving the Maximum Flow Problem, 2010 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Krakow, Poland, September 7, 2010.
- ⑮ 日比亮太, 高橋規一, シンプレックス法に基づく逐次部分最適化アルゴリズムの収束性について, 平成22年度電気関係学会九州支部連合大会, 九州産業大学, 2010年9月26日.
- ⑯ 高橋規一, 区分線形リカレントニューラルネットワークによる2値ベクトル系列の生成, 平成22年度電気学会電子・情報・システム部門大会, 熊本大学, 2010年9月2日.
- ⑰ 肥塚紗希, 高橋規一, クラスター係数の最大値および極大値に関する考察, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 鳴門教育大学, 2010年8月2日.
- ⑱ Norikazu Takahashi, Tetsuo Nishi and Hajime Hara, Analysis of Signal Propagation in 1-D CNNs with the Antisymmetric Template, 12th IEEE International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications, Berkeley, USA, February 5, 2010.
- ⑲ 小林裕太, 高橋規一, 凸2次計画問題に対する2段階逐次部分最適化アルゴリズム

ムの実験的評価, 電子情報通信学会非線形問題研究会, 屋久島環境文化村センター, 2009年11月11日.

- ⑳ Yuta Kobayashi, Norikazu Takahashi, A Two-Phase Decomposition Algorithm for Solving Convex Quadratic Programming Problems, 2009 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Sapporo, Japan, October 21, 2009.
- 21 Norikazu Takahashi, On Clustering Coefficients of Graphs with the Fixed Numbers of Vertices and Edges, European Conference on Circuit Theory and Design 2009, Antalya, Turkey, August 27, 2009.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計0件)
- 取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等

<http://www-kairo.csce.kyushu-u.ac.jp/~norikazu/homepage.ja.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 規一 (TAKAHASHI NORIKAZU)

九州大学・大学院システム情報科学研究
院・准教授

研究者番号: 60284551