様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 14 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009 ～ 2011
課題番号：21560472
研究課題名（和文） 非線形最適制御問題に対する統一理論の構築および数値実験による検証

研究課題名（英文） A unified Approach to nonlinear optimal control problems and its numerical experiments

研究代表者
井前 譲 （IMAE JOE）
大阪府立大学・工学研究科・教授
研究者番号：30184807

研究成果の概要（和文）：
終端時刻が固定されていないもの，初期状態点が固定されていないもの，設計すべきパラメータが含まれるもの，物理的な拘束条件が絡んだもの，状態点がジャンプするものなどの種々の非線形最適制御問題に対し，標準的な最適制御問題の枠組みで統一的に議論できることを理論的に明らかにした．また，実用的な観点から非線形最適制御問題に対し，非可微分な場合や非線形性が強い場合を考慮した数値解法アルゴリズムの構築可能性を数値実験により検証した．

研究成果の概要（英文）：
From a theoretical point of view, a unified approach is proposed for nonlinear optimal control problems with unspecified terminal-time, with unfixed initial-states, with free design parameters, or with hybrid dynamics. From a practical point of view, numerical approach is investigated towards non-differentiable and/or highly-nonlinear situations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：制御工学
科研費の分科・細目：電気電子工学・制御工学
キーワード：制御工学，最適制御，非線形系，統一理論，数値解法，ハイブリッド，拘束条件，非可微分関数

1. 研究開始当初の背景

多くの地球的規模の複雑かつ解決困難な課題を考えるとき制御技術への期待はこれまで以上に大きい．その中で，近年のコンピュータ

性能の加速度的な発展により，実時間で非線形最適制御を実現することが可能となり，例えば非線形モデル予測制御(NMPC)が注目されている．現実的な非線形最適制御問題を時々刻々定式化し，かつ最適解を時々刻々算出する制御技術である．これは，非線形最適制御問題の定式化が重要な役割を果たす一例である．

非線形最適制御問題には多くの種類がある．終端時刻が固定されていないもの，初期状態点が固定されていないもの，設計すべきパラメータが含まれるもの，物理的な拘束条件が絡んだもの，状態点が時折ジャンプするものなど，枚挙に暇がない．残念ながら，現時点ではこれらに対し統一した解法は提案されておらず，個別な対応を強いられている．少なくとも，NMPCを適用する観点からは大きな障害といえる．したがって、これらの種々の非線形最適制御問題を区別なく取り扱うことのできるいわゆる「統一理論」の構築が望まれていた．

２．研究の目的

本研究では，これらの非線形最適制御問題が「ある種の標準的最適制御問題」の枠組みで統一的に議論できることを明らかにする．さらに「ある種の標準的最適制御問題」に対する数値解法を，微分可能性を仮定せずに提案して，その収束証明および数値実験を行う．微分可能性を仮定しないことで（以降，非可微分と表現する），より広いクラスの非線形最適制御問題（不感帯やバックラッシュなどを含む場合）を見通しよく取り扱うことが可能となる．本研究は「非線形最適制御問題の統一理論の構築」，「非可微分な非線形最適制御問題の数値解法の確立」の二つの課題から構成される．

３．研究の方法

2009年度は以下のとおりである．
（1）拘束条件を考えるとき，本研究では空間を歪める考え方を用い，状態空間を歪めてあたかも無拘束かのような空間（擬似空間）をつくることを試みた．すなわち，拘束条件のある最適制御問題を，拘束条件のない問題として扱う考え方である．状態変数および入力変数のいずれの場合も取り扱いその考え方を整備した．その効果を数値実験かつ実機実験にて確認するため，入力拘束条件付最適制御問題に焦点を当て，擬似空間上のハミルトン・ヤコビ方程式を導出し，その数値解を関数の形で求めた．なお，入力空間を歪めた場合，ハミルトン・ヤコビ方程式による入力関数の導出は困難とされるが，新たな工夫を凝らしている．以上により，本手法の考え方の正当性を検証した．
（2）状態点が不連続にジャンプし，さらにジャンプ時刻が未知な場合の問題は，連続量と離散量が混在するハイブリッド最適制御問題として知られている．はじめに，状態点のジャンプ現象を連続量の一部であると考えた．すなわち，状態空間を平面と考えるとき，その平面の一部を切り取り，残りの部分を繋ぎ合わせる考え方である．この考え方を利用し，状態点がジャンプする場合を含む正準形式最適制御問題の定式化を試みた．しかし，状態変数の次元が非常に大きくなることが明らかになった． なお，正準形式最適制御問題とは，適用範囲は限られるものの，研究代表者により既に提案されたある種の統一理論のことである．
（3）上述の（1）および（2）の研究状況を考慮し，正準形式による最適制御問題の定式化の前準備として，ディスクリプタ形式による最適制御問題の定式化およびその数値解法の確立を試みた．ディスクリプタ形式は制御対象の表現能力に優れているといわれる．その表現能力を参考にして，正準形式による統一理論の構築の可能性を検討することを目的とした．

2010年度は以下のとおりである．
（1）状態点のジャンプ現象に対し従来の「連続量の一部」との考えを発展させ，「状態軌道の折りたたみ」を考案しその可能性を検討した．どちらの場合も状態の次元は一時的に増大するが，後者のほうが次元は小さい傾向にあることがわかった．しかし，後者は数学的には取り扱いが困難であることがわかった．したがって，統一理論の確立には両者の融合が必要と判断した．その融合のための接着剤として，前年度の検討を参考にして状態の不連続量を許容するデスクリプタ形式の表現を再検討した．また，デスクリプタ形式の表現と数値解法との相性に関し詳細に再検討した．
（2）非可微分な最適制御制問題に対する数値解法として，微分可能な関数からの近似手法が実用的であるとの観点から，微分可能関数によるある種の極限関数から構成されるラパーを非可微分な概念として決定した．これにより非可微分関数に関連する微分情報を十分に利用できることが期待できると同時に，これまでに確立されている通常の数値解法に類似した形で非可微分アルゴリズムの確立が期待できる．ところで，以上は主に実用的な観点からの評価が中心である．今後の重要な検討課題として，数値解法の理論的な収束証明があげられるが，これに関して不

明確な部分が存在することを明らかにした.

2011 年度は以下のとおりである.
(1)ディスクリプタ形式の表現能力とその最適制御計算との相性について検討した. ハイブリッド形式を包含できる可能性はあるものの統一理論には至らなかった. これに対し, 時間軸を部分区間に分割してそれらをスライドする方法を工夫し, 新たな観点からの統一理論を試みた. 仮想時間による正準形式の枠組みでの定式化には至らなかったものの, ある種の統一理論の構築に成功した.
(2)ラパーを用いて数値解法を試みる場合, 微分不可能な関数を微分可能な関数で近似する方法をとる. ラパーを使わない実用的な接近法をも視野に入れてこの近似手法を非ホロノミック系が持つ粘性解に適用し, 非可微分な粘性解がある種の可微分な近似関数により計算可能であることを検証した. この結果, 近似関数により非可微分な最適制御問題の数値解法の実現可能性を明らかにした. ただし, 対象とする問題の難易度に大きく依存する結果となっており, 非可微分な数値計算に関しては今後に課題を残す形となった.
(3)可微分な場合の最適制御問題に関しては, ある種の統一理論の構築に成功しており, さらに時間軸スライド法ではその必要条件として最大原理を理論的に導出した. したがって, 統一理論に対する数値解法においては, 収束証明がなされた従来の計算手法がそのままの形で適用可能となり, 統一理論に対する数値解法が構成可能となる. 一般に統一理論はその性格上, 強い非線形性を持つことが予想される. 不確定初期状態点や不確定パラメータを含む最適制御問題, およびハイブリッド最適制御問題をいくつか取り上げ, 現実的な観点から数値実験を行いその実用性を確認した. なお, 数値計算ではここで得られた最大原理に基づく新たな解法を工夫している.

4. 研究成果

(1)非線形最適制御問題の統一理論の構築

① 物理的な拘束条件が絡んだ問題:
　空間を歪ませることにより, 拘束のある空間から拘束のない空間への変換を行う. これによって制御対象は拘束のない空間に移され, 制御系設計が容易となる. ここで設計された制御系は, 元の空間においては拘束を満足することとなる.
　拘束のない空間に変換する変換関数はある種の極座標系への変換となる. 半径方向に適切な関数を選ぶことにより, 変換後のシステムの挙動は拘束条件を満たす集合内におさまる. ここでは複数の入力拘束, または複数の状態拘束が凸集合の場合における変換方法について検討した. また, 現実的な制御問題として障害物回避問題がある. この場合は状態拘束が凸集合とはならず座標変換が困難となる. この点に関しては残念ながら従来の結果を再検討するにとどまった. 変換関数の理解を助けるため, 以下に1次元の入力拘束(凸集合の場合)と障害物回避問題(凸集合ではない場合)を取り上げる.
　まず, 1次元入力拘束の場合を考える. 入力 $u \in \overline{U} \subset \Re^1$ に対し, 拘束条件 $|u| \le u_{\lim}$ とする. 変換関数を考えるとき, ある種の極座標を用いる. 1変数の場合は回転方向を考える必要がなく, 半径方向のみを考える. 変換関数は次式となる.

$$u = u_{\lim}\sin(w)\ ,\ \ w \in \Re^1$$

この変換関数により変換を行うと, 仮想的な入力 w には拘束条件が生じず, すべての w に対し入力 u は拘束条件を満たすことになる.
　次に, 障害物回避問題を考える. 簡単のために状態は2次元とする. 障害物回避問題における拘束条件を次のように定義するとき,

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 \ge 0$$

半径 R の円の内側に禁止領域が存在することとなる. この場合は次のような変換関数を用いることで, システムを拘束のない問題に変換し, 常に障害物に衝突しない制御系を作ることができる.

$$x_1 = [\tilde{x}_2^2 + R]\cos(\tilde{x}_1)$$

$$x_2 = [\tilde{x}_2^2 + R]\sin(\tilde{x}_1)$$

この変換関数が表わす擬似空間は図示すると図1

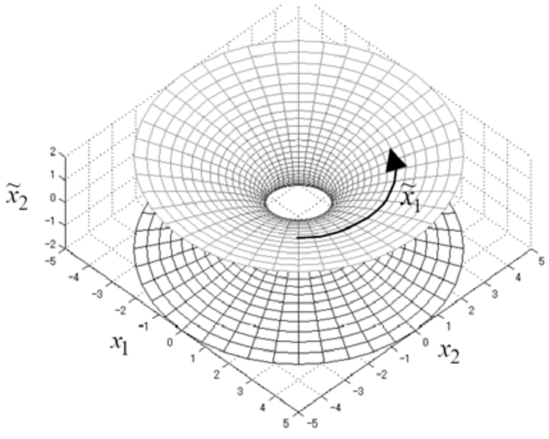

Fig. 1 Quasi space of obstacle avoidance problem

となる. 図1は本来の状態である x_1, x_2 の平面に対し極座標の回転方向に $\tilde{x}_1$, 平面に対して垂直に $\tilde{x}_2$ の軸を取っている. 図1の中心部分の空白

となっている円が障害物である．図1で表わされる曲面が擬似的な空間となっており，変換関数によって変換された状態点はこの曲面上を動くことになる．すなわち，状態点がどのように曲面上を移動したとしても，障害物の内側に入ることはない．

以上により拘束のある問題から拘束のない問題に変換することができた．これにより拘束条件を含む場合も拘束のない最適制御問題の枠組みに統一される．ゆえに，標準的な最適制御問題に変換されたといえる．

② 状態点がジャンプする問題：

状態点がジャンプする問題をジャンプのない問題へと変換する．その考え方は，時間軸変換により各区間をスライドし，図 2 のように一つの基準区間 [0,1] にまとめることである．基準区間における新たな時間軸を $\tau \in [0,1]$ とし，各区間を変換式

$$t = T_j \tau + t_{j-1} \;,\; t \in [t_{j-1}, t_j]$$

によりスライドする．ここに $T_j = t_j - t_{j-1}$ とする．

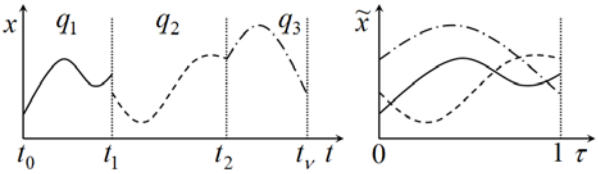

Fig.2 Time-axis slide

これにより，状態量 $x_j(t)$ および入力 $u_j(t)$ は以下のように変換される．ただし，$\tau \in [0,1]$ である．

$$x_j(t) = x_j(T_j \tau + t_{j-1}) = \tilde{x}_j(\tau) \;,\; j \in \{1, \cdots, \nu\}$$

$$u_j(t) = u_j(T_j \tau + t_{j-1}) = \tilde{u}_j(\tau) \;,\; j \in \{1, \cdots, \nu\}$$

時間軸 $\tau \in [0,1]$ においては状態点がジャンプしない連続な状態軌道を持つ最適制御問題となる．このとき，時間軸変換によりいくつかの決定すべき未知パラーメータが生じるが，正準形式最適制御問題の枠組みであることを考えると標準的な最適制御問題に変換されたといえる．

③ 統一理論の構築：

上述の①では状態拘束および入力拘束が標準的な最適制御問題の枠組みにおさまり，②では状態点のジャンプ現象が，正準形式最適制御問題の枠組みへと変換された．したがって，終端時刻が固定されていないもの，初期状態点が固定されていないもの，設計すべきパラメータが含まれるもの，物理的な拘束条件が絡んだもの，状態点がジャンプするものなどが標準的な最適制御問題に変換され，統一的に取り扱うことができることから「統一理論」の構築に成功したといえる．ただし，正準形式の表現形式に上述の5つの場合を記述するにはあまりにも煩雑になる可能性があり，より柔軟な表現能力を持つ記述形式の構築が重要と考えられる．この点に関しては今後の課題とする．

(2)非可微分な非線形最適制御問題の数値解法の確立

非可微分な最適制御問題の定式化および数値解法アルゴリズムの検討に際して，実用的な観点からラパーを採用した．非可微分概念は数学的な概念でありながら，ラパーは近似関数で近似計算をすることを許容しており工学的な観点からは評価できる．なお，近似関数を許容する非可微分概念は他にも存在するが，ラパーは研究代表者の考案であり，正確かつ的確な取り扱いが期待できることを採用決定の根拠とした．しかしながら，近似関数を許容する非可微分概念の提唱者の一人である J.Warga（電子メールによる意見交換，2010 年)により指摘された収束性証明の問題点が現時点においても解決されず，今後の大きな課題として残された．

本研究ではラパーの問題点が解決された場合を想定し，近似関数を用いた数値計算の可能性を中心に検討を試みた．ここでは，最適制御問題の解が非可微分な解である粘性解となる非ホロノミックシステムを取り上げる．また，微分可能な最適制御問題といえども，数値計算の立場からは状態点がジャンプする問題は解法困難が予想される．なぜなら，正準形式の枠組みではあるが，時間軸変換に際していくつかの決定すべき未知パラメータが混在するからである．この点に関してもハイブリッドシステムの最適制御問題として数値計算の観点から検討した．

① 非ホロノミックシステムの数値解法

設計仕様として最適性を考慮することは重要である．評価関数を最小にする最適フィードバック制御器を求めるには Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程式の解，たとえば

$$0 = -\frac{1}{4}\frac{\partial V}{\partial x} G R^{-1} G^T \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T + l$$

の解 $V(x)$ を求めなければならない．非ホロノミックシステムの場合，$V(x)$ は非可微分な粘性解となる．一般的に粘性解を求めることは極めて困難といわれる．ここではラパーにおいて許容される近似関数の立場から粘性解の近似関数を数値計算により求める．すなわち，ε を用いて $V(x)$ をある工夫により $V_\varepsilon(x)$ で近似する．このときの HJB 方程式は

$$0 = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} f_\varepsilon - \frac{1}{4}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} g_\varepsilon R^{-1} g_\varepsilon^T \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}\right)^T + l$$

となり，その解$V_\varepsilon(x)$は滑らかになることが期待できる．なお，理論的にはεの値が小さければ粘性解$V(x)$に近い解を得ることができるが，実用的な観点からは報告例が少ない．本研究では2種類の例題を通して実用的な観点からの検証を行った．

ここでは，2次元非線形システムの結果を示す．$V(x)$，$V_\varepsilon(x)$を有限差分法により求める．図 3 は$V(x)$を示しており，原点で微分不可能な点をもっている． $\varepsilon = 0.1$の$V_\varepsilon(x)$を図 4 に示す．数値計算により滑らかな解$V_\varepsilon(x)$を得ることができた．したがって，近似関数による数値計算は実用的な観点からも可能であることがわかった．

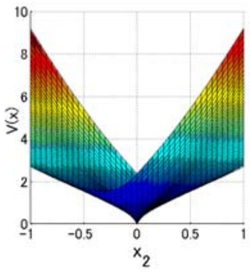

Fig.3 Value of $V(x)$

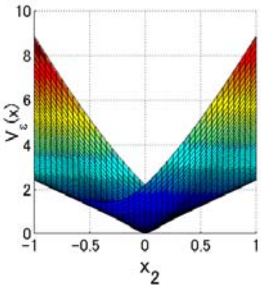

Fig.4 Value of $V_\varepsilon(x)$

② ハイブリッドシステムの数値解法

状態点がジャンプする場合，標準的な最適制御問題に変換されたとしても数値計算上は困難が予想される．ここでは数値解法の開発も視野に入れて最大原理に基づく新たな解法を工夫する．すなわち，以下の計算手順により検証する．時間軸変換が実施されたとして，計算手順の大筋は以下のとおりである．

[Step1] 未知パラメータの初期値を適切に選ぶ．
[Step2] 未知パラメータが適切に固定されたもとで，通常の最適制御問題の数値解法アルゴリズムを適用し，数値的に最適解を求める．
[Step3] 適切な更新則に従いパラメータ更新を行う．
[Step4] ハイブリッドシステムの最適解に関する終了条件が満たされていればStep5 へ進む．それ以外は Step2 へ戻る．
[Step5]時間軸をもとにもどして状態点がジャンプする最適制御問題に変換する．終了．

全体で7種類の例題を取り上げ，あらゆる観点から数値計算の実用性を検証した．ここでは，Van der Pol 問題（自励振動現象）を一部に含むハイブリッドシステムに対する数値計算の結果を示す．図 5 にある状態点のジャンプ現象を示す．$t_1 = 1.197116$ でジャンプが行われているのがわかる． 非線形性の強い最適制御問題であっても未知パラメータの適切な更新則により実用的解法が可能であることが示された．

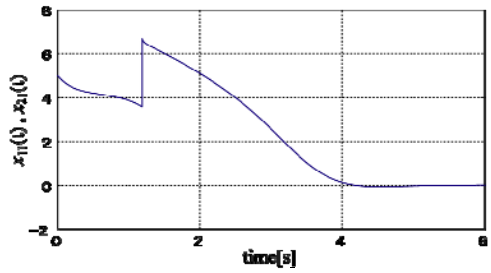

Fig.5 Optimal trajectory

5．主な発表論文等

〔学会発表〕（計7件）

①井前譲，中 将之，小林 友明，時間軸スライド法を用いたハイブリッド最大原理の検討，日本機械学会 関西支部第 87 期定時総会講演会，2012 年 3 月 17 日，関西大学千里山キャンパス

② Tomoaki Kobayashi, Tomoaki Ozaki, Joe Imae, A New Control Design for Nonholonomic Systems Based on Controllability of Linear Systems, 2011 IEEE/SICE International Symposium on System Integration (SII2011), 2011 年 12 月 22 日，京都大学 吉田キャンパス

③井前譲，上田良平，小林友明，ディスクリプタシステムに対する最適制御問題の数値解法，第 54 回自動制御連合講演会，2011年11月19日，豊橋技術科学大学

④J. Imae, K. Shinagawa, T. Kobayashi, and G. Zhai, A New Approach to the Approximate Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, International Conference on Intelligent Control Systems Engineering 2011, 2011 年 3 月 29 日，Bangkok, Thailand,

⑤井前譲，池原正成，小林友明，翟 貴 生，遺伝的プログラミングを用いた量子制御系設計，計測自動制御学会関西支部 若手研究特別発表会 2011，2011 年 1 月 18 日，常翔学園大阪センター

⑥井前譲，上田敦史，翟貴生， 小林友明，擬似入力を生成する Hamilton-Jacobi 方程式の一解

法, 日本機械学会関西支部定時講演会, 2010年3月17日, 神戸大学

⑦井前讓, 吉村幸一郎, 翟貴生, 小林友明, 非線形ディスクリプタシステムの数値解法アルゴリズムに関する一考察, 計測自動制御学会関西支部若手研究発表会, 2010年1月15日, 常翔学園 大阪センター

6. 研究組織

(1)研究代表者

井前 讓(IMAE JOE)

大阪府立大学・工学研究科・教授

研究者番号:30184807