

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月19日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21580293

研究課題名（和文） 弾性体モデルによる管水路流れ数値解の総合的な誤差評価

研究課題名（英文） Comprehensive error estimation of simulations of pipe flows with elastic water column model

研究代表者

島田 正志 (SHIMADA MASASHI)

筑波大学・生命環境系・教授

研究者番号：10272436

研究成果の概要（和文）：

Mach 数の小さい管内弾性波動の数値解析の誤差評価法を時間補間・特性差分法を対象に理論的に開発した。時間軸方向の2格子点間での補間による誤差（補間誤差）と粘性項の特性線に沿った時間積分誤差（粘性誤差）の複合効果について、定常波(standing waves)に着目して、解析的に導出された数値解と厳密解と比較して誤差評価法を定式化した。定常流時間進行解析には基本モードを最低精度にするなど、誤差制御により流れの統一的な解析法の格子形成の基礎理論として本手法は有用である。

研究成果の概要（英文）：

The paper deals with how to estimate numerical errors of characteristic finite difference equations using time-line interpolations, valid for water hammer in pipes with small Mach number. The method of estimating errors due to interpolations between two adjacent grids in time line and time integration of friction terms along characteristic lines is formulated using comparisons between numerical solutions, which are analytically derived, and exact solutions of standing waves in pipe networks. It will be useful tool for generating adequate grids for computations through accuracy control such as time-marching steady flow approach controlling the accuracy to be worst, leading to decaying fast the elementary mode of standing wave.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,800,000	1,140,000	4,940,000

研究分野：農学

科研費の分科・細目：農業土木学・農村計画学

キーワード：流体工学, 管水路, 水撃現象, 数値解析, 特性法, 誤差解析, 時間補間, 定常波

1. 研究開始当初の背景

(1) 水輸送のパイプライン化は、農民の自由な水使用を可能にして我が国の農業経営の近代化を推進した。一方、パイプラインは稲の生育段階、また降雨等の気象条件に依存して、流量が時空間的に大きく変動するので、システムの制御・管理上困難な問題を抱えている。他のパイプラインと同様に、システムの機能の検討、安全性の確保の観点から、定常流、非定常流の数値解析が実務上大きな役割を担っている。

(2) 一方、パイプライン流れ数値解析の分野においても、計算効率や精度保証などいくつかのベンチマークをクリアした数値解析手法が、欧米を中心に **Global Standard** として模索されている。特に、数値解の誤差評価が残された大きな課題であり、ユーザーが事前に計算対象の流れと使用する手法、格子などから精度を知ることが望ましい。

(3) 著者らは、非定常流の剛性体モデル解析理論、弾性体モデル・非定常流解析法を用いた定常流の解析理論、弾性体モデル・高周波非定常流に対する数値解析の格子決定理論など、国際的にも高く評価される数値解析法を開発してきた。また、近年、弾性体モデル数値解析法に対する誤差理論を構築しつつある。

(4) 厳密なモデルである弾性体モデルに対して、適切な格子設計と許容誤差を定量化した上で、各種の流れの統一的に解析を可能とするシステム論的な誤差理論の確立が必要である。

2. 研究の目的

(1) 誤差評価 本研究では、2つの誤差因子である補間誤差と粘性誤差を統一的・総合的に明らかにし、ユーザーが事前に流れの特性に応じて許容誤差を評価できる手法開発を目指す。これにより、実務的なパイプライン

の数値解析手法の信頼性がより向上する。

具体的には、時間補間特性直線差分法を対象に、補間パラメータ、格子の種類（規定間隔格子、ダイヤモンド格子）と格子間隔、波動特性（周波数）、および、粘性パラメータの間の関係として、定常振動の振幅減衰誤差と位相誤差を定量化する。

(2) 統一的流解析法 誤差解析基礎理論であるシステムの線形安定性解析法と格子形成理論の発展を図り、非定常流・定常流の統一的解析手法を目指す。

本研究の成果は、高周波から低周波、また、定常流解析の最適な格子設計を可能として、農業用の水輸送パイプラインのみならず、高度なプラントでの各種流体輸送パイプラインの数値解析の共通に適用でき、流体輸送のオンライン制御などの数値解法にも重要な貢献が可能である。

3. 研究の方法

(1) 誤差評価の考え方 Mach 数の小さい管内弾性波動は弱い非線形現象なので、粘性抵抗をある状態からの微小な摂動と近似すれば線形現象として、厳密に記述できる。特に、定常波現象は理論上システムに対しても遷移行列法で偏微分方程式の厳密解(以下、厳密解と呼ぶ)を求めること可能である。厳密解は定常波の時間的変形を記述する。一方、偏微分方程式の数値解法を代表的な時間補間特性差分法として、数値解の厳密解（以下、数値解と呼ぶ）を求める方法を開発する。定常波の数値解を厳密解と比較することから、誤差評価が可能となる。定常波は単振動の減衰振動が基本であるので、その振幅減衰や位相特性に着目した定量的な誤差評価をする。

(2) 定常波の厳密解、数値解の理論

① 遷移行列法 定常波の厳密解を構成する核となるのが、遷移行列である。これは、管路両端でのベースとなる定常状態からの摂動

量を連続量として関係づける行列である。外部境界、内部境界（管路の結合部）の流量とエネルギー連続条件と全管路の遷移行列を併せると斉次線形方程式となる。定常波を作る外部境界条件（摂動流量か摂動圧力水頭をゼロとする）を課すと、無限離散的な定常波を表す複素周波数(complex frequency)が導かれる。複素周波数から単振動の厳密な挙動を知ることができる。遷移行列法はすでに確立された理論である。

② 多項式遷移行列法 定常波の数値解を構成する核となるのが、多項式遷移行列である。これを新たに定式化することが、本研究の核心である。多項式遷移行列は、管路両端での定常状態からの摂動量を離散量として関係づける行列である。遷移行列法と同様な考え方から、定常波を作る外部境界条件を課すと、有限離散的な定常波を表す複素増幅因子(complex amplifying factor)を導くことができる。補間と粘性の効果を同時に反映する多項式遷移行列法の導出とネットワークシステムへの拡張が新たな課題である。また、計算格子（規定格子とダイヤモンド格子）が異なる場合、多項式遷移行列の表現を求め、格子の影響を調べる。

(3) 研究展開の道筋は以下の通りである。

① 単一管路に対して、時間補間特性差分式(reachback number m , 補間率 ξ , Courant number $C_R=1/(m+\xi)$)の多項式遷移行列法を導き、補間誤差・粘性誤差を併せた総合的誤差解析を行う。特に、規定格子とダイヤモンド格子の誤差特性の総合的な評価を行う。

② 多項式遷移行列法のネットワークシステムへ拡張する。遷移行列法との類似性を生かして、多項式遷移行列法グラフ理論で定式化して、誤差を定量化して誤差特性を議論する。

③ 最低次モード（基本モード）に対する離

散化誤差特性から、ダイヤモンド格子の定常流解析への応用性についても検討する。

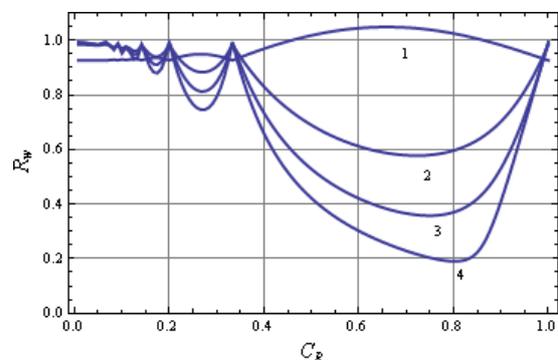
以上から、時間補間誤差特性、規定間隔格子とダイヤモンド格子の誤差特性、定常流解析問題への応用性を総合的に考察する。

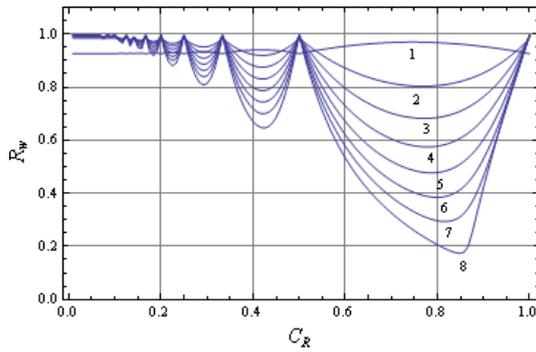
4. 研究成果

(1) 単一管路システム

① 奇数モード、偶数モードを起こす境界条件を課した線形安定性解析により、単振動の変形を記述する複素増幅因子を決定する手法を一般的に定式化した。格子分割数に対応する離散的な周波数成分を規定する特殊な多項式を導き、無限領域での安定性解析から得られる多項式とも整合することを示した。離散個の複素増幅因子を規定するこの特殊な代数多項式の分析から、粘性誤差（空間格子の大きさ）が減衰振動を崩壊させ過減衰をもたらす理論的可能性（質的側面）、補間誤差が減衰振動の振幅減衰と位相誤差に量的にのみ影響すること、また、減衰振動を表す定常波の厳密解との照合により、両誤差の総合的な誤差特性を明らかにした。

上流端圧力水頭一定、下流端流量一定（奇数モード）を対象に、有限領域で発生する定常波動の相対的振幅減衰率 R_w （1波長についての減衰率） (R_w) と位相速度の誤差 (E_p) 評価の結果を図示する。 $(1-R_w)$ が相対的振幅誤差を表す



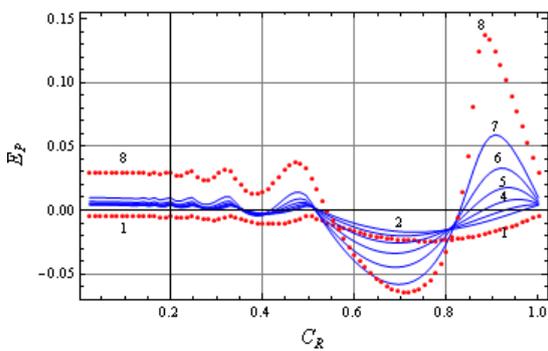
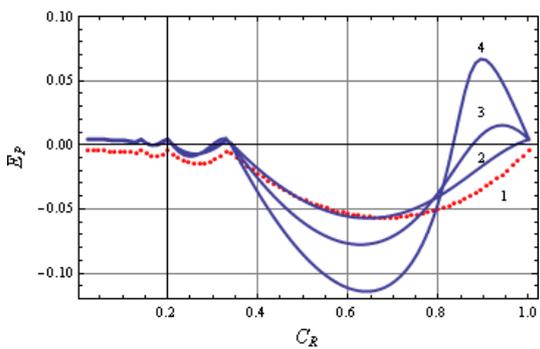


相対的振幅減衰率 R_w (1 波長についての減衰率)

(上段) ダイヤモンド格子 (下段) 規定格子

格子分割数 $N=8$, $\Delta x=L/8$, L =管長, 横軸 $C_R=$

$1/(m+\xi)$, 図中の数字はモード数



位相誤差 E_p

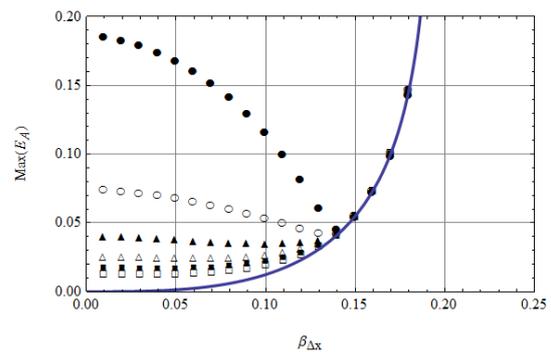
(上段) ダイヤモンド格子 (下段) 規定格子

振幅減衰は、固定した空間格子間隔 Δx に対して、大局的には時間格子間隔 Δt を小さくする(大きな m)と誤差は小さくなる Trend だが、局所的には無補間($\xi=0$ or 1)では粘性効果のみでほぼ中間 $\xi \sim 0.5$ 程度で最大となる。位相誤差は、正 (誤差により波動が早く伝播)

負 (誤差により波動が遅く伝播) の値をとる点が異なるが、大きさの傾向は振幅と同様である。

② 同一の空間格子の大きさに対して、規定格子とダイヤモンド格子でのモード数はほぼ 2 : 1 で、特に奇数モードでは対象とする固有周波数がかかなり異なることから、ほぼ同一の固有周波数が現れる偶数モードに対して、誤差評価を比較した結果、規定格子の使用がダイヤモンド格子の使用に優越することが明確となった。

③ 粘性効果 ($\beta_{\Delta x}$: ベースとなる定常流の 1 空間格子あたりの無次元粘性抵抗を表す) が大きくなると、両格子とも数値的な臨界振動条件に近づくと、基本モード (図中モード数=1) の誤差は 2 次より高次のモードとは異なる質的な違いが見られた。



上図 (横軸 $\beta_{\Delta x}$) は、臨界振動近傍 ($\beta_{\Delta x} \sim 0.19$) で振幅誤差 $|E_A|$ の増大を示す理論解析の結果である。ただし、黒塗りがダイヤモンド格子、白抜きが規定格子で、空間格子間隔を $\Delta x=L/4, L/8, L/16$ と変えた。

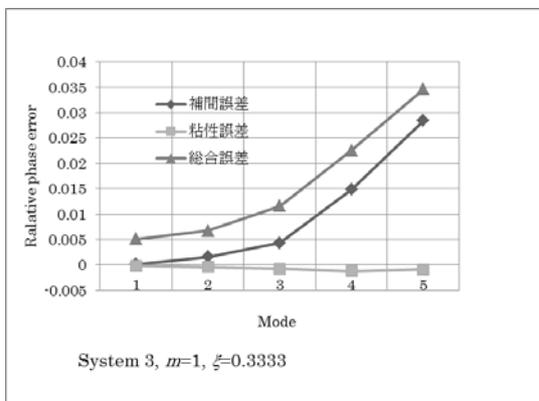
(2) ネットワークシステム

① 内部境界での弾性波の反射・透過が介在し一段と複雑なシステムへ手法を拡張し、誤差特性を総合的に明らかにする方法を明らかにした。偏微分方程式系の遷移行列法による自由振動解析の枠組みを用いて、特性差分方程式の多項式遷移行列法による自由振動解析法を一般システムへ適用する方法を

グラフ理論的に定式化した。すなわち、各管水路の多項式遷移行列、内部境界条件、および、外部境界条件から、システム係数行列—ベクトル方程式を導いた。定常波を規定する境界条件の冗長性を除いた正方行列の行列式（固有多項式）から単振動の変形を記述する複素増幅因子を規定できる。

② ネットワークシステムに対して定式化した方法を、直列系、分岐系、ループシステムなど類似した諸元を有する比較的単純な6つの管水路システム（直列系、樹枝状、ループ系）に適用して、位相速度、振幅減衰の誤差特性を検討した。

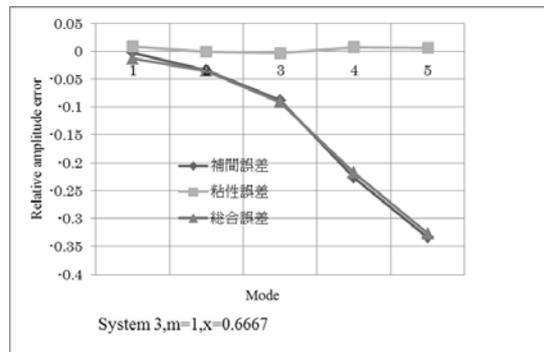
定常波動の周期誤差（位相誤差）は、補間誤差により増大、粘性誤差により減少するが、総合的には、補間誤差の影響が大きく、全体として周期は増大する。例えば、下図は周期（Mode1~Mode5）について、補間誤差（非粘性）、粘性誤差（無補間）、総合誤差（粘性と補間による誤差）を示す。



振幅誤差については、粘性誤差が周波数に応じて僅かに増減するが、大局的に補間誤差が支配的で、常に振幅は過大に減少する。位相誤差と同様のケースについて、振幅誤差の例を図示する。

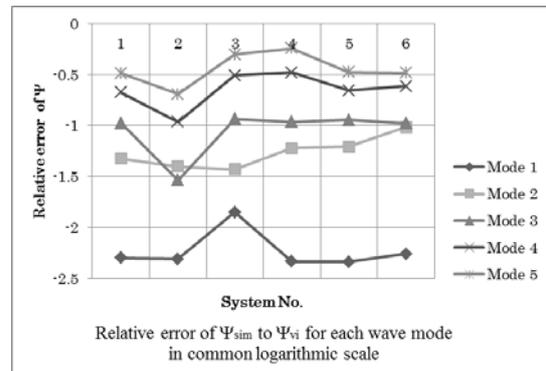
結論として、補間による誤差が誤差を支配するので、可能な限り格子に近い時間軸上の点での補間にとどめるよう格子設計に留意すべきである。議論した範囲では、単一管路

システムでの臨界振動のように、粘性誤差が質的な差を生み出すことはなかった。



(3) 定常波の減衰速度と定常計算格子

静止から過渡的流れ・定常波を経て、定常波が減衰し定常流と見做せる状態への移行速度は、基本モード(Mode1)の複素増幅因子の大きさ $|\Psi|$ と非定常シミュレーションの振幅減衰の計測値 $|\Psi_{sim}|$ にほぼ一致した。これは高周波(Mode2~Mode5)の減衰率が基本モードより大きいためである。下図は、6つのシステム（横軸）に対して、Mode1~5の複素増幅行列の大きさ $|\Psi|$ の $|\Psi_{sim}|$ に対する相対誤差を常用対数（縦軸）で示した。



誤差理論から、一定の空間格子間隔 Δx に対しては、時間格子間隔 Δt の大きな無補間の場合、基本モード定常波が速やかに減衰し、定常流に漸近することが解明できた。

一定の時間格子間隔 Δt に対しては、空間格子間隔 $\Delta x=L$ の無分割格子の場合に、基本モード定常波が速やかに減衰する。著者が提

案してきたシステムの仮想変換法の理論の核心が立証された。

(4) 本研究を通して、Mach 数の小さい管内弾性波動数値解析法の単一管路からネットワークシステムまで応用可能な誤差評価法が定式化できた。誤差制御により所要の精度（定常流解析には基本モードを最低精度にするのが目標）を達成するための格子形成の基礎理論として有用である。本方法の理論は Mach 数の小さい管内弾性波動の他の数値解析法の誤差評価にも応用できる。一方、大規模システムへ直接的適用には、記号処理、数値処理の上の処理能力に限界があるので、比較的小さなシステムでの理論解析により、実務的な格子形成法などを構築するのに利用することが今後の課題である。

研究成果の一部は、”Non-linear interaction of friction and interpolation errors in unsteady flow analyses”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE で 閲 読 中、また、”Influence of discretization errors on predicted resonance response of pipe networks”, 11 回 Pressure surges 国際会議 (2012.10 Lisbon) で講演発表の予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

島田 正志 (SHIMADA MASASHI)

筑波大学・生命環境系・教授

研究者番号：10272436

(2) 研究協力者

Alan Vardy (ALAN VARDY)

University of Dundee,

Civil Engineering Division, Professor