

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月19日現在

機関番号：15401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654011

研究課題名（和文） 離散群の非離散表現

研究課題名（英文） Indiscrete representations of discrete groups

研究代表者

作間 誠 (MAKOTO SAKUMA)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30178602

研究成果の概要（和文）：

2橋絡み目の2橋球面上の単純閉曲線が絡み目補空間内でヌルホモトピックとなるための条件、周辺の条件を完全に決定した。また、2橋球面上の2つの単純閉曲線が絡み目補空間内ホモトピックになる条件を完全に決定した。応用として、2橋絡み目に対する McShane の等式の類似を与え、そのカスプのモジュラスが閉測地線の複素長さを用いて記述できることを証明した。

研究成果の概要（英文）：

We completely determined those simple loops on the 2-bridge spheres of 2-bridge links to be null-homotopic or peripheral in the link complements. We also completely determined when two simple loops on the 2-bridge spheres of 2-bridge links to be homotopic in the link complements. As an application of these results, we established a variation of McShane's identity for 2-bridge links, which gives a formula to express the modulus of the cusp of a 2-bridge link in terms of the complex translation lengths of closed geodesics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	0	900,000
2010年度	800,000	0	800,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	240,000	2,740,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：離散群，非離散表現，2橋結び目，2橋絡み目，錐多様体

1. 研究開始当初の背景

2橋絡み目の双曲構造に関する秋吉宏尚，和田昌昭，山下靖との共同研究により構成した双曲的錐多様体のホロノミー表現は一般には非離散的ではあるが，実験的には非常に良い性質を持っていることが見て取れ，そこから様々な予想が生まれた。

2. 研究の目的

2橋絡み目の2橋球面上の単純閉曲線の錐多様体内における振る舞いを明らかにし，研究の背景で述べた経緯で生まれた予想の解決を目指した。

3. 研究の方法

当初は複素力学系，複素解析学のアイデアの

適用を考えたが、研究目的の一つである2橋球面内の単純閉曲線の絡み目補空間における振る舞いの研究には組み合わせ群論における small cancellation theory が非常に有効であることが、釜山大学 Donghi Lee 准教授との共同研究により判明し、それ以降は small cancellation theory を活用して研究を行った。

4. 研究成果

2橋絡み目の2橋球面上の単純閉曲線が絡み目補空間内でヌルホモトピックまたは(周辺の)となるための必要十分条件をファレイトイル張りの言葉で与えた。また、2橋球面上の2つの単純閉曲線が絡み目補空間内ホモトピックになる条件をファレイトイル張りの言葉で与えた。応用として、2橋絡み目に対する McShane の等式の類似を与え、2橋絡み目のカスプのモジュラスが閉測地線の複素長さをを用いて記述できることを証明した。また2橋絡み目の完備双曲構造のホロノミー表現に対応する穴あきトーラス基本群の $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現の (Bowditch 及び Tan-Wong-Zhang の意味での) エンド不変量を完全に決定した。これらの研究成果は研究代表者が1999年に提起した予想の解決を与えており、その予想に興味を持っていただいていた様々な研究者から祝福してもらえたのは、この上ない幸せである。今後はこの結果を2橋絡み目と Riley 切片を結ぶ双曲的錐多様体に対するものへの拡張を目指す。

以下で、上述の研究成果の詳細を説明する。傾き r の有理絡み目を $K(r)$ とし、その2橋分解球面が定める絡み目補空間 $E(K(r))$ 内の4点穴あき球面を S とする。ファレイトイル貼り D において、頂点 s を端点に持つ辺に関する鏡映変換全体が生成する無限二面体群を $\Gamma(s)$ とする。 $\Gamma(1/0)$ と $\Gamma(r)$ が生成する D の自己同型群を $\Gamma(1/0, r)$ とする(上図参照)。このとき、次の定理が成立する。

定理1. 傾き s をもつ S 上の本質的単純閉曲線 $\alpha(s)$ が絡み目補空間 $E(K(r))$ 内でヌルホモトピックとなるための必要十分条件は、 s が $1/0$ または r の $\Gamma(1/0, r)$ -軌道の上に有ることである。

これより、Ohtsuki-Riley-Sakuma による2橋絡み目群の間の全射準同型に関する主定理の逆が成立することが導かれる。即ち、次の系を得る。

系. 絡み目基本群 $G(K(s))$ から $G(K(r))$ への上

メリディアン対保存全射準同型が存在するための必要十分条件は、 s が $1/0$ または r の $\Gamma(1/0, r)$ -軌道の上に有ることである。

さらに S 上の二つの単純閉曲線がいつ絡み目補空間 $E(K(r))$ 内でホモトピックか? という問題への解答も得た。

定理2. 絡み目補空間 $E(K(r))$ 内でヌルホモトピックにならない、 S 上の二つの単純閉曲線 $\alpha(s)$, $\alpha(s')$ が絡み目補空間 $E(K(r))$ 内でホモトピックとなる必要十分条件は、(トーラス絡み目とホワイトヘッド絡み目を除けば) s と s' が同一の $\Gamma(1/0, r)$ -軌道の上に有ることである。

上述の定理で例外となったトーラス絡み目とホワイトヘッド絡み目に対しても同じ問題に対する完全な解答を得ている。さらに、この定理の証明を分析することにより、次の定理も得られた。

定理3. 絡み目補空間 $E(K(r))$ 内でヌルホモトピックにならない S 上の単純閉曲線 $\alpha(s)$ は、 $K(r)$ がツイスト結び目で s が r によって定まる特別な傾きである場合に限り周辺のである。

次に定理1~3の応用として、次の McShane の等式の類似を得る。

定理4. 双曲2橋絡み目 $K(r)$ のカスプトーラスのモジュラスは、 S 上の本質的単純閉曲線にホモトピックな $E(K(r))$ 内の閉測地線の複素長に関する無限和で記述できる。

Tan-Wong-Zhang は Bowditch の研究に触発されて、一点穴あきトーラス T の基本群の型保存 $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現 ρ のエンド不変量集合 $E(\rho)$ を定義し、これに関する様々な興味深い結果を得た。しかしながら、「自明」な場合を除いて $E(\rho)$ を具体的に記述することはできなかった。このような状況において、双曲絡み目群 $G(K(r))$ の忠実離散 $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現が定める一点穴あきトーラス T の基本群の型保存 $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現 $\rho(r)$ のエンド不変量集合 $E(\rho(r))$ を以下のように具体的に記述することができた。

定理5. 双曲絡み目群 $G(K(r))$ の忠実離散 $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現が定める一点穴あきトーラス T の基本群の型保存 $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現 $\rho(r)$ のエンド不変量集合 $E(\rho(r))$ は、ファレイトイル貼りの自己同型群 $\Gamma(1/0, r)$ の極限集合に一致

する.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1. Donghi Lee, Makoto Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge links: Homotopically trivial simple loops on 2-bridge spheres, Proc. London Math. Soc., 104 (2012), 359—386, doi:10.1112/plms/pdr036
査読有り
2. Donghi Lee, Makoto Sakuma, Simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements, Electron. Res. Announc. Math. Sci., 18 (2011), 97—111, doi:10.3934/era.2011.18.97
査読有り
3. Warren Dicks, Makoto Sakuma, On hyperbolic once-punctured torus bundles III: Comparing two tessellations of the complex plane, Topology and its applications, 157 (2010), 1873—1899, doi:10.1016/j.topol.2010.02.010
査読あり
4. Makoto Sakuma, Kenneth Schackleton, On the distance between two Seifert surfaces of a knot, Osaka Journal of Mathematics 46 (2009), 203—221,
<http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1235574044>.
査読有り

[学会発表] (計 14 件)

1. Makoto Sakuma, Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups, Tokyo Workshop on low-dimensional topology, 2012年3月22日, 東京工業大学.
2. 作間 誠, Prime amphicheiral knots admitting a free involution, 「結び目の展望」2012年3月18日, 早稲田大学.
3. Makoto Sakuma, On Heckoid groups for 2-bridge links, Low dimensional topology and number theory IV, 2012年3月14日, 九州大学.
4. Makoto Sakuma, On Heckoid groups for 2-bridge links, 「離散群と双曲空間」, 2011年12月16日, 数理解析研究所.
5. Makoto Sakuma, Simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements, Hy

perbolicity in geometry, topology and dynamics, 2011年7月28日, Warwick大学, 英国.

6. Makoto Sakuma, End invariants for $SL(2, \mathbb{C})$ characters of the once-punctured torus associated with 2-bridge links, Geometric and analytic approaches to representations of a group and representation spaces, 2011年6月21日, 数理解析研究所.
 7. Makoto Sakuma, Simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements, Workshop on low-dimensional topology in Shanghai and Suzhou, 2011年5月15日, 華東師範大学, 中国.
 8. Makoto Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge link groups: Essential simple loops on 2-bridge spheres, RIMS Seminar, Twisted topological invariants and low-dimensional manifolds, 2010年9月, あきた白神体験センター.
 9. Makoto Sakuma, A variation of McShane's identity for 2-bridge links, Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties, 2010年8月13日, シンガポール国立大学, シンガポール.
 10. Makoto Sakuma, Epimorphisms between 2-bridge link groups: simple loops on 2-bridge spheres, The 6th East Asian School of Knots and Related Topics, 2010年1月27日, nankai University, 中国.
 11. 作間 誠, variations of McShane's identities for 2-bridge links, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2010年1月11日, 名古屋大学.
 12. 作間 誠, Generalized McShane's identities for bordered surfaces, 研究集会「Workshop on Weil-Petersson Volumes」. 2009年12月21日, 東京工業大学.
 13. 作間 誠, Punctured torus bundles: Comparing two tessellations of the complex plane, 火曜トポロジーセミナー. 招待講演, 2009年7月, 東京大学.
 14. 作間 誠, Punctured torus bundles: Comparing two tessellations of the complex plane, 近畿大学数学教室講演会. 2009年6月, 近畿大学.
- [その他]
ホームページ等
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~sakuma/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

作間 誠 (MAKOTO SAKUMA)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30178602

(2) 研究分担者

鎌田 聖一 (SEIICHI KAMADA)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60254380

(3) 連携研究者

寺垣内 政一 (MASAKAZU TERAGAITO)
広島大学・大学院教育学研究科・教授
研究者番号：80236984

大鹿 健一 (KEN' ICHI OHSHIKA)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70183225

須川 敏幸 (TOSHIYUKI SUGAWA)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：30235858

山下 靖 (YASUSHI YAMASHITA)
奈良女史大学・理学部・教授
研究者番号：70239987

秋吉 宏尚 (HIROTAKA AKIYOSHI)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：80397611

角 大輝 (HIROKI SUMI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：40313324