

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654014

研究課題名（和文）

2次元点渦系の数理科学的研究の新展開

研究課題名（英文）

Developments of the mathematical research of the system of 2D point vortices

研究代表者

木村 芳文 (Kimura Yoshifumi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70169944

研究成果の概要（和文）：

2次元渦運動のモデルである点渦系についての数理科学的な特徴をとらえ、それを発展させることを目的とした。点渦系の特徴の一つとして、渦衝突の問題を取り上げ、2次元の場合の相似的な渦衝突解を3次元の場合に拡張し、流体方程式の特異性の問題として考察した。また2次元乱流と3次元乱流の中間として安定成層乱流の問題を題材として取り上げ、乱流統計における2次元性と3次元性の問題を考察した。

研究成果の概要（英文）：

The objective of the research project was to consider and develop the mathematical aspects of the point vortex system as a model for two dimensional vortex motions. As one of the characteristics of the model, we have studied the problem of vortex collapse, and extended the 2D self-similar collapse solution into one in three dimensions. We have also studied the statistical properties of stably stratified turbulence as a middle of 2D and 3D turbulence, and investigated the difference in the dimensionality.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	0	1,200,000
2010年度	900,000	0	900,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	3,000,000	270,000	3,270,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率統計）

キーワード：渦運動 乱流 渦衝突 パンルベ方程式 ソリトン方程式 定常配置問題

1. 研究開始当初の背景

渦運動の研究は流体力学の研究の中で長い歴史を持っており、数学に非常に多くの学問的刺激を与えてきたと言える。渦運動の研究のなかで過度が空間に集中した点渦や渦線モデルの研究は基本的ではあるが、非常に豊かで新しい数学的問題を数多く提供している。本研究課題は渦運動のなかで、とくに2次元の流れについて過度が点に集中した点渦系に注目して研究を行うものであった。

2次元渦運動は歴史的に複素関数論を始め多くの数学の分野に様々な問題意識を提

供してきた流体力学における重要な研究テーマである。そのなかで点渦系は2次元渦運動の簡単なモデルであり、Helmholtzの論文に始まる長い研究の歴史を持っている。近年、この点渦系の研究が「点渦の定常配置と可積分方程式」や「多様体上の渦運動」の観点から新たな展開を見せている。本研究課題の目的はこの最近の研究動向を背景に点渦系の研究に数理科学的な新たな展開を図ることにあつた。研究開始にあたって以下の問題を提案した。

[1] 点渦系の定常配置とソリトン方程式

点渦系が定常（静止或は配置を変えない回転および並進運動を含む）である場合、点渦系のある種の分配関数は2階の微分方程式を満たし、その解が Adler-Moser 多項式で与えられることは以前から知られていた。最近の研究ではこの2階常微分方程式の解が generalized Hermite 多項式および generalized Okamoto 多項式で書けることがわかり、点渦の定常解がパンルベ方程式系やソリトン方程式の有理解の問題と直接的に関係することを示す事が指摘されている。この研究を拡張して、点渦系の可積分性を再考することを目標にした。

[2] 2次元定曲率曲面上の点渦の運動

申請者は Proc. Roy. Soc. London Ser A 455 (1999) 245--259: "Vortex motion on surfaces with constant curvature". において2次元定曲率曲面のすべての分類である S^2 (球面), E^2 (平面), H^2 (双曲面) における渦運動を考察した。最近この論文の拡張としてより一般の閉曲面上の渦運動が考察されるようになってきており ("Vortices on closed surfaces", by S. Boatto & Jair Koiller, arXiv: 0802.4313v1) この研究を進めることを計画した。

2. 研究の目的

本研究の目的は2次元渦運動のモデルである点渦系について数理科学的に新たな展開を図ることにある。点渦系の定常解は単に数学的な興味だけではなく、回転液体ヘリウム中における渦糸群などのように実際に実験で観測されており、回転数に応じての渦糸の個数、および系の安定性は流体力学の実験家にも有益な情報を提供できると考える。また、球面上の点渦の安定配置の問題は極付近のジェットストリームの安定性の問題のモデルであり、気象の研究者とも議論を行なう価値があると考え。環境問題から発展して球面上、さらにそれを拡張して曲面上の点渦の問題を考えるとというのは自然な研究発展の流れであり、意味のあることであると思う。さらに点渦の研究の2次元乱流への応用は環境問題とも関連し、地球規模で重要性が認識されている。渦運動と乱流の関係については点渦系の研究を始める元々の問題意識として、2次元と3次元での渦運動と乱流の相違について考えることが重要であることが再認識され、その点を新たな研究課題として考察していくこととした。

更に新たな視点として流体方程式の特異性の問題が解析学、応用数学の問題としてクローズアップされてきており、その関係で渦衝突の問題を再検討し、それを拡張することを研究の目的に加えた。これらの視点を加えて、乱流の問題における2次元の渦運動と3次元の渦運動の比較へと問題の拡張を行っ

た。

3. 研究の方法

渦運動は流体の非線形性に強く依存しており、その運動の理解には数値解析が不可欠である。また、渦運動の研究は世界的に活発に行われており、国際的な情報交換が重要になって来ている。以上のことから

(1) モデル方程式の考察

(2) 数値計算の実施とその分析

(2) 国内外の研究者との議論と成果の発表といった3つ方法にそって研究を進めた。

(1) については過去に遡っての研究を見直し、新たな視点からいくつかのモデルが構築できた。(2) についてはモデル方程式の数値計算は可視化を含めてデスクトップ或はラップトップのコンピューターを用いて行った。さらに大規模な乱流計算については名古屋大学情報基盤センターのスーパーコンピューターを使用して解析を行った。(3) については乱流研究について米国大気研究所に滞在して活発な議論を行うとともに国際研究集会として米国物理学会流体分科会に毎年参加し、研究成果を報告した。

4. 研究成果

研究項目に挙げた[1] 点渦系の定常配置とソリトン方程式、[2] 2次元定曲率曲面上の点渦の運動については現在でも研究を進行中である。このうち特に[2]に関しては研究のまとめを行っており、前述の S. Boatto 博士からは2012年11月に Federal University (Rio de Janeiro) で開催される国際会議「N-vortex and N-body dynamics」で基調講演に招待されている。

先に述べたように本研究課題の研究の新たな展開として研究成果については以下の2点が主な内容として得られた。

(1) 3次元渦糸系の相似衝突モデル

2次元点渦系は点渦が特殊な初期条件と渦度の条件を満たすとき、初期の配置形を保ったまま相似的に原点で衝突する解をもつことが知られている。それらの初期条件は点渦系の力学系から得られる代数方程式の解として記述できる。この問題を3次元に拡張し、空間内に対称に配置された6対の渦対の衝突を記述するモデルを提唱した。この系の発展を記述するため、一つの渦糸に沿ってX軸を置き、その渦糸上の一点を代表点として、その点における他の渦糸が誘起する速度とともに渦伸張の効果を検討したモデル方程式を導出し、その相似解を厳密に求める事によって衝突時間（時間特異点）や衝突角度を見積もる事ができた。今後、この相似解から得られた特異性と数値解析との比較を行うことは興味深い問題であると考え。

(2) 安定成層乱流における渦構造とエネルギー

ギースペクトル

2次元における点渦系と3次元における渦系系の問題を考察する過程で、流体の2次元性と3次元性の相違が非常に重要な問題意識として認識されてきた。特に乱流の問題においては流れの領域の次元は問題を考察する上で本質的なポイントである。ここでは2次元乱流と3次元乱流の中間の性質をもち、環境問題でも重要な役割を担う成層乱流について研究を行った。最も最初に明らかにすべき課題として、(安定)成層乱流のエネルギースペクトルについて考察した。

2次元と3次元の中間の性質を持つ事は流れの性質は方向に応じて大きく変化する異方性を持つ事を意味する。安定成層乱流では安定性のため運動は水平面内が卓越し、鉛直面は抑制される。しかしながら水平面同士の独立性のために非常に強い鉛直シアが形成され、それが水平方向の渦度を誘起する、というのが2次元と3次元を結ぶ力学的メカニズムである。

強い異方性があるので、成層乱流のエネルギースペクトルを考察するのにもその異方性に適した方法が必要である。そのため、

(1) 速度場をCraya-Herring分解し、トロイダル方向とポロイダル方向に分離しそれぞれの成分を観察する。

(2) 円柱座標を導入し、3次元波数空間を2つの波数に分けてアンサンブル平均をとる。という2つの方法を導入した。

名古屋大学情報基盤センターのスーパーコンピュータ(HPC2500)を用い、格子点数 1024^3 のスペクトル計算を行った結果以下のような結果が得られた。

(1) トロイダル成分(水平成分)のエネルギーの水平波数スペクトルは低波数側で k^{-3} の2次元性、高波数側で $k^{-5/3}$ の3次元性を示し、それらはシャープなべき遷移を起こすことが分かった。

(2) 時間的には最初に低波数側の k^{-3} スペクトルが発達し、その後高波数側の $k^{-5/3}$ スペクトルが立ち上がってくる。

(3) 成層が強い場合には流れ場の渦度の大きさを計算すると鉛直面内にKelvin-Helmholtz渦が多数観測されるが、それらは水平面内では柱状の渦ではなく、ぶつ切れた互い違いの渦であることが観察された。このことより水平スペクトルの3次元スペクトルはKelvin-Helmholtz渦が水平方向に破碎して生じたものであることが予想されている。

(4) 鉛直方向のスペクトルは低波数側がフラット、高波数側は急峻(k^{-3})な部分に分かれることが観測された。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計6件)

[1] Y. Kimura & J.R.Herring : Energy spectra of stably stratified turbulence, *Journal of Fluid Mech.*, 698 (2012) 19-50. [査読有]

[2] Ye Zhou, C.E. Leith, J.R. Herring & Y.Kimura Predictability error growth of turbulent flows, *Mechanics Research Communications* 39 (2012) 15-17. [査読有]

[3] J.R.Herring & Y. Kimura : Spectra and Distribution Function of Stably Stratified Turbulence, in the *Proceedings of the IUTAM Symposium on "Turbulence in the Atmosphere and Oceans"*, Cambridge, UK, Dec.2008 (ed.D. Dritschel, Springer), (2010). 143-154. [査読有]

[4]Y.Kimura, Self-similar collapse of 2D and 3D vortex filament models, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 24(2010) 389-394. [査読有]

[5] 木村 芳文, 2次元乱流における勾配の発展,

第58回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009 (2009) 527-528. [査読無]

[6] 木村 芳文, ナヴィエ・ストークス方程式と流体の運動, 数理科学 2009年6月号 pp. (2009) 35-39. [査読無]

[学会発表] (計11件)

[1]木村芳文: 地球流体乱流の数値解析, 平成23年度名古屋大学HPC計算科学連携研究プロジェクト成果報告シンポジウム, 名古屋大学情報基盤センター 2012年5月9日

[2]Y.Kimura & J.R. Herring, Energy transfer for stably stratified turbulence, 64th Annual Meeting of APS/DFD (Baltimore, Maryland, USA) 2011年11月22日

[3]Y.Kimura, Point vortex motion and complex-time singularities, 48th Annual Technical Conference of Society of Engineering Sciences, Northwestern University, Evanston, Illinois USA, 2011年10月12-14日

[4]Y.Kimura & J.R. Herring, Energy spectra of stably stratified turbulence, 6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference, Hawaii Convention Center, Honolulu, Hawaii 2011年6月28日

[5]木村芳文: 地球流体乱流の数値解析, 平成22年度名古屋大学HPC計算科学連携研究プロジェクト成果報告シンポジウム 名古屋大学情報基盤センター 2011年5月11日

[6]Y.Kimura & J.R.Herring, Energy Spectra of Stably Stratified Turbulence, 62nd

Annual Meeting of APS/DFD(Long Beach, California) 2010年11月23日 招待

[7]Y.Kimura, Structure Formation in Stratified Turbulence, GTP Workshop on “ Topics in rotating Stratified Turbulence ”, National Center for Atmospheric Research, 2010年8月2日

[8]木村 芳文: 成層乱流におけるエネルギースペクトル、第2回名古屋大学計算科学セミナー、名古屋大学情報基盤センター、2010年11月10日

[9]Y.Kimura & J.R.Herring, Energy Spectra of Stably Stratified Turbulence, 62nd Annual Meeting of APS/DFD 2009年11月24日, Minneapolis, Minesota

[10]Y.Kimura & J.R.Herring, Energy Spectra of Stably Stratified Turbulence, EUROMECH/European Turbulence Conference 12 2009年9月9日, Marburg, Germany

[11]木村 芳文, 2次元乱流における勾配の発展, 第58回理論応用力学講演会(NCTAM2009) 2009年6月11日 日本学術会議

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kimura>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 芳文 (Kimura Yoshifumi)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 70169944

(2) 研究分担者
該当者なし

(3) 連携研究者
該当者なし