

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 24 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654020

研究課題名（和文） 確率幾何モデルに対するくりこみ群のアプローチ

研究課題名（英文） Renormalization Group Approach to Stochastic Geometric Models

研究代表者

原 隆 (HARA TAKASHI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：20228620

研究成果の概要（和文）：

水を熱すると水蒸気になるが、このように外部パラメーター（この場合は温度）の変化に応じて物質の状態が変わることを相転移という。相転移に際しては、様々な物理量が発散し、これを臨界現象という。臨界現象の解析に有効な手法として、くりこみ群の方法がある。本研究では、くりこみ群の解析手法を、自己回避ランダムウォーク（溶液中の一次元高分子のモデル）などの確率幾何モデルやイジングモデル（磁石のモデル）の低温相に対しても有効になるように厳密に拡張することを目的とし、証明の大筋を得た。

研究成果の概要（英文）：

Water changes into vapor when heated. This is an example of phenomena called a phase transition. When a phase transition occurs, a lot of physical quantities diverge (or show singular behavior). This is an example of critical phenomena. One of the most effective tools in the analysis of critical phenomena is the method of renormalization group. The purpose of this research is to extend the existing renormalization group techniques to the analysis of stochastic geometric models (such as self-avoiding walk) and low-temperature phase of spin systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	600,000	0	600,000
2010年度	500,000	0	500,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	150,000	1,750,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：くりこみ群，臨界現象，自己回避ランダムウォーク，パーコレーション，イジングモデル，低温相

1. 研究開始当初の背景

(1) 「くりこみ群」は統計力学および場の理論の理解には欠かせない解析手法であり、これまでも非常に多くの成果を上げてきた。特に「上方臨界次元」における臨界現象の解析には、くりこみ群がほとんど唯一の解析手法である。

(2) しかし、ランダムウォークやパーコレーションなどの確率幾何モデルに対するくりこみ群の適用例は、(a) その臨界現象を解析できるほど強力でないか、(b) 確率幾何モデルを一旦、場の理論（スピン系）のモデルに書き直した上でくりこみ群の手法を適用したもののか、がほとんどであった。これでは、モデルの本質である「確率幾何」的特徴をうまく捉えることは不可能である。また、パーコレーションは場の理論のモデルにうまく書き直せないため、従来の手法では解析できない。

(3) また、スピン系のモデルに対しても、その高温側の解析はかなりなされているものの、低温相の解析はほとんど行われていなかった。特に、低温相での臨界現象が実際にどうであるのか、満足における結果は存在しない。

(4) このように、解析手法としてのくりこみ群の有効性は広く認識されていたにも関わらず、その威力が存分に発揮されたのはかなり限定された状況であり、特に確率幾何モデルやスピン系の低温相の問題にはほとんど手がつけられていない。これが本研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

本研究では、1の「背景」で述べたような、くりこみ群の限界を打ち破ることを目的とした。もちろん、この目的は具体的なモデルの解析を通して達成される。そこで、具体的には以下の二つの目標を設定した。

(1) ランダムウォークやパーコレーションなどの確率幾何モデルに対しては、これらの系を場の理論のモデルに書き直さず、直接のくりこみ群解析を行うことを目標とする。パーコレーションとランダムウォークでは、ランダムウォークの方がより解析しやすいと考えられるため、まずは非自明なランダムウォーク

モデルの代表例として自己回避ランダムウォークの系を取り上げて、この系のくりこみ群解析を厳密に行うことを目標とした。なお、この解析は4次元以上の空間における自己回避ランダムウォークの系に対して行った。

(2) 一方、スピン系の低温相の問題も非常に重要である。特に、どのような手法であっても、その低温相での臨界現象に迫る研究が皆無であったので、ともかく、低温相の臨界現象を解析できるくらい強力なくりこみ群の手法を開発することを目標とした。また、その前段階として、同じく未解決であった「外部磁場の中の臨界点直上でのスピン系の臨界現象」の解析を行うことも目標とした。この解析は4次元以上の空間における「 ϕ^4 スピン模型」について行った。

(1)(2)の系はともに、5次元以上では「平均場理論」で予想されるような臨界現象を示すことが予想されている。また、4次元では平均場理論の予想に「対数補正」が付くことが予想されている。従って、これらの「平均場的な臨界現象」や「対数補正」が実際にあるのかどうか、はっきりさせることも目標である。

3. 研究の方法

くりこみ群の手法にはいろいろな流儀があり、対象とする系に対応して適切な方法を選ぶのが望ましい。本研究では以下のような方法を用いた。

(1) 自己回避ランダムウォークに対しては、最も自然とおもわれるくりこみ変換 (n ステップ毎のウォークの位置を固定して、ウォークのその他の位置で足し上げる；このような手法は decimation と呼ばれる) を遂行することを目標とした。

この操作の数学的な定義は明確であるが、問題はこの変換の計算を実際にどのように遂行するか、である。一般にくりこみ群解析では、一回の変換でも非常に多数の項が生成され、これらの項をすべて押さえ込んで評価することが必要となる。また、この計算に際しては、確率的に良く起こる典型的な事象と、なかなか起こらない例外的な事象を区別することが肝要であることも経験上、わかっている。(この区別無しに解析を行うと、発生

する項の数が爆発的に増えて收拾がつかなくなる.)

典型的な場合については、場の理論やスピンの系でもよく使われる摂動論を用いた解析を行った。この領域を以下、便宜上「摂動領域」と呼ぶ。

例外的な場合（以下これを「非摂動領域」と呼ぶ）が問題で、摂動論が使えない。非摂動領域では一般的に使える手法は知られておらず、個々のモデルに応じて、相応の工夫が必要とされる。確率的にはなかなか起こらない事象のはずであるが、それを数学的に押さえることに非常に苦労した。確率論における大偏差原理などを用いるのが自然であるので、その方向をまず考えた。また最近になって、以下の(2)の成果を元にして、有望な道が見えてきている。

(2) スピン系の低温相に関してかなりの困難が予想されたので、以下のように問題解決を図った。

① まず初めにウォームアップとして、「 ϕ^4 スピンモデルが臨界点直上にあり、外部磁場がかかっている場合」の臨界現象を調べた。外部磁場がかかっていたら、スピンの土対称性が破れ、従来の手法が使えない。低温相でも土対称性が破れているので、これは低温相の解析に向けての大変良い練習問題となるのである。解析手法としては、原の博士論文のテーマであった、Gawedzki と Kupiainen によるくりこみ群の手法を用いた。この場合にも自己回避ランダムウォークと同じような「非摂動領域」の問題が生じるが、今回は特に大きな問題を生じる事もなく解決できた。このようにこの解析は非常に順調に進んだ。

② 次に、外部磁場のある場合の経験を元にして、低温相における臨界現象を解析した。この場合も、Gawedzki と Kupiainen によるくりこみ群の手法に大幅に手を加えたものを用いた。

スピンの低温相でくりこみ変換を行うと、系は段々とイジングモデルのような、スピンの値が ± 1 の値しかとらない系に近づく。しかし、くりこみ変換を行う前の系はスピン変数が連続的な値をとる系である。これら二つの極端な場合をうまくつなぎながらくりこみ変換を行うことが必要であり、それを如何に行うかに注力した。特に、「非摂動領域」の問題がかなり厄介で、相当の工夫を必要としたが、最終的には問題を解決することができた。

4. 研究成果

(1) 自己回避ランダムウォークに対して得られた成果は以下の通りである。

① 摂動論による解析を実行し、「摂動領域」についてはほぼ完全な結果を得た。特に、予想された「平均場的な臨界現象」とそれに対する「対数補正」が出てくることが確かめられた。以下に述べる「非摂動領域」の寄与が無視できるならば、これは臨界現象に関して予想通りの結果といえる。

② 一方、摂動論が使えない領域（非摂動領域）の解析は、まだ完成はしていない。厳密でない種々の計算はすべて、非摂動領域からの寄与は無視できることを強く示唆するが、数学的に厳密な証明にはまだギャップがある。しかし、(2) で述べるスピンの解析における「非摂動領域」の研究から重要なヒントを得たので、これまでの研究と組み合わせることで突破口が開けることを期待している。

(2) スピン系の低温相に関しては、十分に満足できる結果が得られた。

① まず、外部磁場のある場合の臨界現象については、従来の解析手法に少し新たな視点を加えることで、十分に解析が可能であることを確かめた。もちろん、その結果は、従来から（厳密でない解析により）予想されてきたものと完全に一致し、5次元以上での「平均場的な臨界現象」や4次元での「対数補正」の存在が証明される。

この結果は世界初のはずである。このような手法でできるであろうことは、原を含めたくくりこみ群の専門家には分かっていたことではあるが、実際に行った意義は大きい。しかし、より有意義な結果は次の②である。

② 次に、低温相における臨界現象の解析であるが、これもまた、くりこみ群解析が十分に可能であることを突き止めた。

解析手法としては従来の Gawedzki と Kupiainen の方法に原の博士論文での結果を加え、更にクラスター展開を工夫して用いている。原はここ数年、クラスター展開を深く理解することに取り組んできたが、そこで得た新たな知見から考えると、従来型のくりこみ群の手法とクラスター展開を巧妙に組み合わせれば、十分にくりこみ群解析が可能であることが見いだされた。特に、「非摂動領

域」の問題を解決できたのは大きい。(実は原自身、博士論文を書いた直後にこのような低温相の解析を試みたが、クラスター展開に対する十分な知見がなかったために断念した経緯があった。今回、クラスター展開の理解が深まったことで成果に結びつけられたのは素直に喜ばしいことである。)

結果として、4次元における「対数補正」の存在が示された。この低温相における結果はもちろん世界初であるし、従来の解析手法では到達できなかった領域に大きく踏み込んでおり、扱っている現象も新しい。この意味で、この成果は非常に価値あるものと考えている。

なお、この低温相の解析は、今のところ4次元でのみ、行っている。これは(非常にテクニカルな理由により)従来の手法に付け加えて解析すべき部分が4次元では一番少ないとの理由による。通常、臨界現象の解析は次元が高い方が簡単なので、本研究での事情は少々、意外でもある。もちろん、5次元以上の解析も(4次元よりも更に大変ではあるが)今回の手法で十分に可能であるので、4次元の計算を完成してから5次元以上も解析する予定である。

なお、挑戦的萌芽研究としての本研究の主目的は(新たな解析手法を発見したので)十分に達成したが、細部を詰めて証明を完成し、論文の形にするにはまだ暫くの時間が必要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計0件)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：

出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

原 隆 (HARA TAKASHI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20228620

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：