

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月21日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654053

研究課題名（和文） 位相的量子計算の研究

研究課題名（英文） Studies on topological quantum computation

研究代表者

樋上 和弘 (HIKAMI KAZUHIRO)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：60262151

研究成果の概要（和文）：位相的量子計算の重要な指標としてエンタングルメント・エントロピーがあげられる。エンタングルメント・エントロピー、特にその位相的性質に起因する部分の理解には量子不変量の解析が不可欠である。我々は、主に色付きジョーンズ多項式についての研究を行った。特に、トーラス結び目の色付きジョーンズ多項式の解析を厳密に行い、古典的位相不変量との興味深い関係を明らかにした。また、量子不変量とモジュラー形式との関連性についての研究を行った。さらに、モジュラー形式のフーリエ係数の漸近的ふるまいと複素多様体のエントロピーとの関連性についてもいくつかの結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Entanglement entropy is one of the characteristic quantities in the topological quantum computation. The entanglement entropy, especially topological entanglement entropy, is intimately related to the quantum invariants of knots and 3-manifolds. We studied the colored Jones polynomials for knots and links. We exactly analyzed the colored Jones polynomial for torus knots, and we obtained explicit relationship with classical topological invariants such as torsions. We also studied the Fourier expansion of modular forms, and obtained a relationship between their asymptotic behavior and the entropy of complex manifolds.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	0	1,200,000
2010年度	1,000,000	0	1,000,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	270,000	3,370,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、数理物理・物性基礎

キーワード：トポロジー、結び目理論、量子情報

1. 研究開始当初の背景

ジョーンズ、ウィッテンによるチャーン・サイモンズ汎函数を用いた結び目および3次元多様体の量子不変量の構成以降、量子トポロジーの研究は活発に行われきた。結び目は物性物理の観点からみると、分数統計性をもつ粒子系（エニオン）として理解でき、量子ホール系などの理解に大変重要な役割を演じている。

一方、量子計算機を用いるショアの素因数分解アルゴリズムの発見以降、量子計算・量子情報の研究が非常に注目を浴びている。量子計算機の実現に向けての有力な候補として、Kitaevは位相的な量子計算機モデルを提唱した。

本研究は量子トポロジーの成果を位相的量子計算の研究に応用することを目指した。

2. 研究の目的

- (1) 量子計算を効率的に行うための一つの指標としてエンタングルメント・エントロピーがあげられる。このエンタングルメント・エントロピーのうち位相的な性質に依存するものは、量子不変量と密接に関連していることが研究代表者らの結果によって示されている。この関連性をさらに追求し、ジョーンズ多項式についての最近の成果をエンタングルメント・エントロピーへと応用することを目的とした。
- (2) 前述のように量子不変量とエンタングルメント・エントロピーとは密接な関係があるが、エンタングルメント・エントロピーの性質をより明らかにするためには量子不変量の幾何学的な性質が必要となってくる。量子不変量の幾何学的側面については十分な研究がなされていない。量子不変量、特にジョーンズ多項式の幾何学的性質、古典不変量との関連を明らかにする。
- (3) 量子不変量とエントロピーとの関連性について研究を進める。ジョーンズ多項式にとどまらず、そのほかの結び目不変量について研究を進める。また、ジョーンズ多項式とモジュラー形式との関連に注目し、モジュラー形式のエントロピーにおける役割を研究する。

3. 研究の方法

- (1) 研究分担者（村上斉）との電子メールでの議論および直接の議論を通してそれぞれの観点の理解を深め、お互いの問題点を共有する。
- (2) 国内外の研究会に出席し、関連分野の最新の知見を得る。
- (3) 関連分野のジャーナル、プレプリントなどの最新の研究の動向に注目し、情報収集、検討を行う。
- (4) Mathematicaなどの数式処理ソフトを用いて計算機実験を行い、その結果から新しい現象を見いだす。
- (5) 国内外の研究集会において成果発表し、参加者との議論を通して、さらなる研究の飛躍を目指す。

4. 研究成果

- (1) 1995年にカシヤエフは量子二重対数関数を用いて結び目不変量を構成し、その漸近極限が結び目の双曲体積に支配されると予想した。その後、この不変量は色付きジョーンズ多項式の1の冪根での値と一致することが村上順・村上斉によって示されたが、漸近極限に関する予想については未解決であり、体積予想と呼ばれる。体積予想から、色付きジョーンズ多項式の別の特殊値の漸近極限も何らかの幾何学的情報が含まれるものと期待される。実際に八の字結び目の色付きジョーンズ多項式の場合には、1の冪根付近での漸近極限は、八の字結び目のデーネ手術によって得られる双曲体積およびチャーン・サイモンズ不変量と関連することが知られている。本研究に於いて、代表者と分担者とが共同で、トラス結び目の色付きジョーンズ多項式の解析を詳細に行った。まず、色つき結び目の特殊値と、結び目補空間の基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現との関係を明らかにした。さらに、色付きジョーンズ

多項式の漸近展開を厳密に行い、 $SL(2, \mathbb{C})$ チャーン・サイモンズ不変量とライデマイスター・トーションが得られることを示すことに成功した。研究成果は代表者と分担者との共著でアメリカ数学会より出版された。

- (2) 量子計算を効率よく行うためには量子性を用いることが必要であり、その指標の一つがエンタングルメント・エントロピーである。このうち位相的な性質に起因するものは、多様体に依存するものであり、多様体の位相不変量と何らかの関係があるものと思われる。本研究では特にカラビ・ヤオ多様体の楕円種数に注目し、超対称共形場理論を用いた解析を行った。ここで用いられる超対称共形場理論の表現は江口・タオルミナによって与えられており、BPS 表現と非 BPS 表現の二通りあることが知られている。これらの表現の指標は、擬テータ函数と呼ばれる函数で表され、厳密な意味でのモジュラー性を持たないため、解析が困難であった。擬テータ函数はラマヌジャンによって導入された古くから知られた函数であるが、近年、ツベガース、プリングマン、オノらの研究によって飛躍的な発展を遂げた。特に、調和マース形式との関連性が明らかにされ、擬テータ函数の数学的な意味づけが明確となった。これらの成果を用いることによって、楕円種数に含まれる非 BPS 表現の数が擬テータ函数のフーリエ係数と一致することを明らかにした。さらには、擬テータ函数が調和マース形式の一部であるとの結果を用いることによって、非 BPS 表現数の漸近形をラデマッハー級数によって評価することに成功した。この漸近形とベッケンシュタイン・ホーキングエントロピーとが類似していることに注目し、非 BPS 状態数をケーラー多様体のエントロピーとして解釈することを提唱した。この手法をさまざまな次元の多様体に適用し、エントロピーの計算を行った。K3 曲面の場合、非 BPS 状態数とある散在群の表現次数との関連が明らかになるなど、本研究において行った、超対称共形場理論を用いた多様体の楕円種数の解析は今後のさらなる発展に向けて、重要な成果となった。以上の研究は江口（京都大学）との共同研究にて行い、研究成果はいくつかの国

際専門誌において出版された。

- (3) 前項の成果から、ある種の擬テータ函数のフーリエ係数は多様体のエントロピーと関連性がある。一方で、3次元多様体の量子不変量自身も擬テータ函数と関連性がある。もともとザギエ・ローレンスの研究によってポアンカレ球のウィッテン・レシェティヒン・トゥラエフ (WRT) 不変量と擬テータ函数との関連性は指摘されていたが、本研究においてはこの結果を更に拡張し、アーノルドの特異点に付随するさまざまなザイフェルト多様体に対する WRT 不変量を具体的に計算し、擬テータ函数との関連性を明らかにした。その結果、絡み対西多賀って WRT 不変量が分解されることを発見した。WRT 不変量の展開係数のエントロピーとしての解釈を探ったが不明である。以上の成果はアメリカ数学会から出版された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Kazuhiro Hikami, Hitoshi Murakami, Representations and the colored Jones polynomial of a torus knot, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, 50, 153-171 (2011) 査読有り
- ② Kazuhiro Hikami, Decomposition of Witten-Reshetikhin-Turaev invariant: linking pairing and modular forms, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics* 50, 131-151 (2011) 査読有り
- ③ T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, Note on twisted elliptic genus of K3 surface, *Physics Letters B* 694, 446-455 (2011) 査読有り
- ④ T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, N=4 superconformal algebras and the entropy of hyperKähler manifolds, *Journal of High Energy Physics*, 2010:02, 019, 28 pages (2010) 査読有り
- ⑤ T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, N=2

- superconformal algebras and the entropy of Calabi-Yau manifolds, Letters in Mathematical Physics, 92, 269-297 (2010) 査読有り
- ⑥ T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, Superconformal algebras and mock theta functions, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42, 304010, 23 pages (2009) 査読有り
- ⑦ T. Eguchi, Kazuhiro Hikami, Superconformal algebras and mock theta functions 2. Rademacher expansion for K3 surface, Communications in Number Theory and Physics, 3, 531-554 (2009) 査読有り

[学会発表] (計 13 件)

- ① Kazuhiro Hikami, Character decomposition of elliptic genus, Workshop on Mathieu Moonshine, スイス工科大学 (チューリッヒ、スイス)、2011年7月9日、招待講演
- ② Kazuhiro Hikami, Volume conjecture and quantum dilogarithm function, Simons Summer Workshop in Mathematics and Physics, Simons Center for Geometry and Physics (ストーニーブルック、アメリカ)、2011年8月12日、招待講演
- ③ 樋上 和弘, Ramanujan 擬テータ関数と Mathieu Moonshine、福岡数論、九州大学 (福岡)、2011年8月23日、招待講演
- ④ Kazuhiro Hikami, Superconformal algebra, mock theta function, and Mathieu moonshine, Workshop “Low Dimensional Topology and Number Theory III”、九州大学西新プラザ (福岡)、2011年3月15日、招待講演
- ⑤ Hitoshi Murakami, The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of the figure-eight knot, Workshop “The 7th East Asian School of Knots and Related Topics”、広島大学 (広島)、2011年1月10日
- ⑥ Kazuhiro Hikami, Asymptotics of quantum invariants, Workshop “Low Dimensional Topology and Number Theory”、オーベルウルファッハ数学研究所 (オーベルウルファッハ、ドイツ)、2010年8月19日、招待講演
- ⑦ Hitoshi Murakami, The colored Jones polynomial of a knot and representations of its fundamental group, Workshop “Low Dimensional Topology and Number Theory”、オーベルウルファッハ数学研究所 (オーベルウルファッハ、ドイツ)、2010年8月20日、招待講演
- ⑧ Kazuhiro Hikami, Superconformal algebras and the entropy of hyperKähler manifolds, Workshop “Prospects in q-series and Modular Forms”、University college Dublin (ダブリン、アイルランド)、2010年7月14日、招待講演
- ⑨ Kazuhiro Hikami, WRT invariants and modular forms, Workshop “Chern-Simons Gauge Theory: 20 years after”、マックスプランク数学研究所 (ボン、ドイツ)、2009年8月7日、招待講演
- ⑩ Hitoshi Murakami, SL(2, C)-representations and asymptotic behaviors of the colored Jones polynomial of a knot, Workshop “Chern-Simons Gauge Theory: 20 years after”、マックスプランク数学研究所 (ボン、ドイツ)、2009年8月5日、招待講演
- ⑪ Hitoshi Murakami, Introduction to volume conjecture I, II, III, Workshop “Interactions between Hyperbolic Geometry, Quantum Topology and Number Theory”、コロンビア大学 (ニューヨーク、アメリカ)、2009年6月6日、招待講演
- ⑫ Hitoshi Murakami, Representations of the fundamental group and the colored Jones polynomial of a knot, Conference “Interaction between Hyperbolic Geometry, Quantum Topology and Number Theory”、コロンビア大学 (ニューヨーク、アメリカ)、2009年6月18日、招待講演
- ⑬ Kazuhiro Hikami, Superconformal algebras and mock theta functions, International Conference “Mock Theta Functions and Applications in Combinatorics, Algebraic Geometry, and Mathematical Physics”、マックスプランク数学研究所 (ボン、ドイツ)、2009年5月28日、招待講演

[その他]
ホームページ等

<http://sites.google.com/site/khikami/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

樋上 和弘 (HIKAMI KAZUHIRO)
九州大学・ 数理学研究院・准教授
研究者番号：6 0 2 6 2 1 5 1

(2) 研究分担者

村上 斉 (MURKAMI HITOSHI)
東京工業大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：7 0 1 9 2 7 7 1

(3) 連携研究者

()

研究者番号：