

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21656026

研究課題名（和文） ボルツマン方程式の不連続境界条件とすべり境界条件の一般化

研究課題名（英文） Discontinuous boundary conditions for the Boltzmann equation
And generalization of slip boundary conditions

研究代表者

青木 一生 (AOKI KAZUO)

京都大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：10115777

研究成果の概要（和文）：境界が先端をもつ場合や境界温度が不連続的に変化する場合には、たとえ気体分子の平均自由行程が系の代表長に比べて十分小さい場合でも、「すべりの境界条件」を用いて気体の流れを正しく記述することができない。モデルボルツマン方程式による精密な直接的数値解析と、線形化ボルツマン方程式の対称関係を用いた間接的理論解析を組み合わせ、そのような場合にすべりの境界条件がどのように修正されるかを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：When the boundary has a sharp edge or a discontinuous temperature, the “slip boundary condition” cannot describe the correct behavior of the gas even when the mean free path of gas molecules is much shorter than the characteristic length of the system. In the present study, it is clarified how the slip boundary condition is modified in such cases, with the help of accurate numerical analysis based on a model Boltzmann equation and indirect theoretical approach based on the symmetry relations of the linearized Boltzmann equation.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2009年度 | 1,900,000 | 0 | 1,900,000 |
| 2010年度 | 700,000 | 0 | 700,000 |
| 2011年度 | 600,000 | 180,000 | 780,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,200,000 | 180,000 | 3,380,000 |

研究分野：工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎，工学基礎

キーワード：物理数学

1. 研究開始当初の背景

(1) 近年のマイクロ工学の急速な発展に伴い、微細構造内での気体の流れの解明が、幅広い工学分野で重要な研究課題になっている。マイクロスケールの気体では、分子同士の衝突が十分でないため、気体は局所的に非平衡状態にある。したがって、事情は通常

の大きさの系における低圧気体と同様で、古典流体力学は適用できず、ボルツマン方程式を基礎とする分子気体力学（気体分子運動論）を用いなければならない。しかし、この方程式の複雑さから、これを実際の工学的問題に応用するのは実用的でない。幸い実際の問題では、気体分子の平均自由行程が流路幅に比べて小さく、したがって非平衡の度合い

が小さい場合（弱希薄気体）が多い。このときには、通常の流体力学方程式にいわゆる「すべりの境界条件」を組み合わせることで、非平衡の効果を正しく取り入れることができる。

(2) しかし、「すべりの境界条件」は、境界が滑らかで、境界に沿っての諸量の変化も滑らかな場合に対して導かれたものであるため、境界に鋭い角があったり境界温度が不連続であると適用できない。この場合には、たとえ平均自由行程が代表長に比べて十分小さくても、ボルツマン方程式による直接的数値解析が必要である。そのため、この種の問題は避けられていたというのが現状で、それらにすべりの境界条件を適用する工夫は全く行われていなかった。この点に着目したのが本研究である。

2. 研究の目的

(1) 上述のように、たとえ平均自由行程が代表長に比べて小さくても、境界に鋭い角があったり境界温度が不連続である場合には、通常の「すべりの境界条件」は適用できない。しかし、この場合にも、境界から少し離れたところの気体の振舞は、流体力学の方程式に従うはずである。したがって、何らかのすべりの境界条件を工夫することによって、少なくとも大域的な気体の流れを正しく記述したり、物体に働く力などの総体的な量を正しく求めたりすることができるはずである。

(2) 本研究の当初の目的は、そのような場合にも適用できる「すべりの境界条件」を工夫することであった。具体的には、次の問題を考察することを考えた。① モデルボルツマン方程式の精密数値解析による先端および温度の不連続点まわりの気体の挙動の解明；② 不連続な表面温度分布をもつ物体が希薄気体中におかれているとき（あるいはそのようなマイクロ物体が通常の気体中に置かれているとき）、物体に働く力を正しく与えるすべりの境界条件の探究。

3. 研究の方法

(1) 数値的研究

境界が先端をもつ場合について、先端の存在がどのようにまわりの気体の流れに影響を与えるかを、ボルツマン方程式のモデル方程式に基づく直接的数値解析によって調べ

た。具体的には、有限領域（箱）の中におかれた平板の両面あるいは片面が箱より高い温度に保たれているときに、平板の先端付近に誘起される気体の流れを、広い範囲のクヌーセン数に対して調べた。数値解法としては、以前に開発した特性曲線法と差分法の混成解法を用いた。この方法によってはじめて、先端から発生する速度分布関数の不連続を正確に記述することができる。

(2) 解析的研究

静止気体中におかれた扁平な回転楕円体（扁球）の前半分が高い一様温に、後半分が低い一様温度に保たれている問題を考え、クヌーセン数が小さい場合について、扁球に働く力を漸近理論（一般すべり流理論）をもとに調べた。

① 間接解法： まず、補助問題、すなわち遠方の気体と同じ一様温度に保たれた同じ形の扁球にその軸に平行な一様流が当たる問題を考え、扁球上の気体の熱流分布を求める。これが分かると、高田によって線形化ボルツマン方程式の対称関係に基づいて導かれた公式により、もとの問題の扁球に働く力が解析的に求められる。この公式の応用に際して、温度の不連続点まわりの気体の挙動と不連続点における特異性の型を仮定する必要があるが、それは、(1)の数値的研究の結果から予測することができる。

② 直接解法： もとの問題の不連続な境界温度を適切な直交関数系で展開し、最初の数項を取ったものに通常のすべりの境界条件を適用すると、扁球まわりの流れの場が求まり、それに働く力が求められる。

上の(a), (b)を比較することにより、正しい力を与えるすべりの条件の形を探索する。

4. 研究成果

(1) 数値的研究

① 上述のように、有限領域（箱）の中に希薄気体が入っており、その中におかれた平板の両面あるいは片面が箱より高い温度に保たれているときには、平板の先端付近に気体の流れが誘起される。この流れを広い範囲のクヌーセン数に対して解明した。より具体的には、平板の両面が加熱されている場合には、先端付近では平板の両側で対称な熱先端流が誘起されるのに対し、片面だけが加熱されている場合には（この場合、境界温度は先端で不連続でもある）、低温面から高温面に向かって、先端を回り込む流れが起こる。後者は、

不連続温度分布によって起こる流れと、先端があることによって起こる流れが合わさったものであり、ラジオメータの羽根のまわりに生じる流れの一つのモデルである。これらの流れを詳しく調べ、両者の類似性を明らかにするとともに、後者の場合に平板に働く力（ラジオメータ力）を広い範囲のクヌーセン数に対して精確に求めた。これにより、クヌーセン数が小さい場合（弱希薄気体）には、平板両面に働く力は平板のほとんどの部分で打ち消しあい、先端付近でのみ差異が生じること、換言すれば、先端付近の流れの場のみが平板に働く力に寄与していること、を明らかにした。

② 上述の研究におけるもう一つの成果は、先端における巨視的物理量の特異性を数値的に明らかにした点である。とくに平板の両面で温度が異なる場合には、物理量は先端で有限値をとるが、その等高線が先端に集中し、そこで値は一意的に決まらない型の特異性を示す。この特異性は、気体分子の速度分布関数が、先端の影響でその付近で不連続となることに起因している。これらの事実は、一般に用いられている数値解析の手法ではとらえきれないもので、本研究で初めて明らかになったものである。

(2) 解析的研究

上述のように、無限に広がった静止気体中におかれた扁球の前半分が高い一様温に、後半分が低い一様温度に保たれている問題を、クヌーセン数が小さい場合について考察した。この問題では、境界の形は滑らかであるが境界温度が不連続であるため、すべりの境界条件（一般すべり流理論）を適用することができない。しかし、高田によって最近導かれた線形化ボルツマン方程式の対称関係から得られる関係式によれば、3 (2) ①で述べた補助問題における扁球表面での熱流が求まれば、もとの問題で扁球に働く力が厳密に求められる。補助問題では境界の形、温度ともに滑らかであるため、一般すべり流理論が適用でき、扁球上の熱流が具体的に得られる。このように、補助問題を介した間接的やり方で、境界温度の不連続がもたらす困難を避け、扁球に働く力を解析的に求めた。一方、もとの問題で不連続な境界温度を直交関数系で展開し、有限項で打ち切れば、この境界温度に対してはすべりの境界条件が適用でき、扁球周りの流れや扁球に働く力が求められる。

物体が球の場合について、この方法による力と間接的方法で求めた正しい力を比較することにより、境界温度の直交関数展開の第1項のみを取れば、正しい力が求められることを示した。これは、不連続表面温度にすべり境界条件を適用する際の重要な指針を与えるものである。また、より多くの項をとることによって、物体近傍を除く大域的な気体の流れがほぼ正確に得られることも分かった。これについては、さらに別の問題でも確認する作業を進めている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① 青木一生, 温度場によって誘起される低圧気流の数値解析, *ながれ*, **31**, 105-110 (2012). [招待論文]

② S. Taguchi and K. Aoki, Rarefied gas flow around a sharp edge induced by a temperature field, *J. Fluid Mech.*, **694**, 191-224 (2012). [査読有]

③ S. Taguchi and K. Aoki, Numerical analysis of rarefied gas flow induced around a flat plate with a single heated side, *Rarefied Gas Dynamics*, edited by D. A. Levin, I. J. Wysong, and A. L. Garcia (AIP, Melville), **1333**, 790-795 (2011). [査読有]

[学会発表] (計8件)

① S. Taguchi and K. Aoki, A simple model for Flows around moving Vanes in Crookes radiometer, 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Zaragoza, Spain (July 9-13, 2012) (予定).

② K. Aoki, Numerical approach to moving and singular boundary problems in kinetic theory, Summer School: Methods and Models of Kinetic Theory, Porto Ercole, Italy (June 4-9, 2012) (予定).

③ 青木一生, 温度場によって誘起される低圧気流の数値解析 (特別講演), 第回数値流体力学シンポジウム, 大阪大学 (2011年12月19日-21日).

④ K. Aoki, Some considerations on radiometric effects (Invited Lecture), Workshop: Novel Applications of Kinetic Theory and Computations, Brown University, Providence, USA (October 17-21, 2011).

⑤ K. Aoki, Some considerations on radiometric effect (Invited Lecture), Non

Linear Hyperbolic Systems of Balance Laws in Extended Thermodynamics and Kinetic Theory, Cortona, Italy (September 4-10, 2011).

⑥ 田口智清, 青木一生, 加熱平板まわりの希薄気体流: ラジオメータ効果のメカニズム, 日本流体力学会年会 2011, 首都大学東京 (2011年9月7日-9日).

⑦ 高田滋, 青木一生, 友田達規, 弱希薄気体中の非一様な表面温度を持つ扁球に働く力, 日本流体力学会年会 2011, 首都大学東京 (2011年9月7日-9日).

⑧ K. Aoki, Boundary-value problems of the Boltzmann equation: Asymptotic and numerical analyses, (Intensive Lecture Series), Conference on Kinetic Theory and Related Fields, Pohang University of Science and Technology, Pohang, Korea (June 20-21, 2011).

[その他]

ホームページ等

<http://www.mfd.me.kyoto-u.ac.jp/member/aoki/aokij.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

青木 一生 (AOKI KAZUO)
京都大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 10115777

(2) 研究分担者

小菅 真吾 (KOSUGE SHINGO)
京都大学・大学院工学研究科・助教
研究者番号: 40335188

(3) 連携研究者

該当なし