様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５　月　21 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2009～2011
課題番号：21656027
研究課題名（和文）　**離散可積分系による離散微分幾何の展開**

研究課題名（英文）　New development of discrete differential geometry by discrete integrable systems

研究代表者
梶原　健司（KAJIWARA KENJI）
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号：40268115

研究成果の概要（和文）：幾何オブジェクトのダイナミクスをコンピュータ上で記述する数学的枠組みの一つである離散微分幾何を取り上げ，離散可積分系の理論を新たに整備し，その結果を積極的に適用して平面曲線のダイナミクスの離散化と τ 函数を用いた明示公式の構成に成功し，変換理論などを整備した．副産物として，曲線のダイナミクスの可変ステップ制御を組み込んだ安定な高精度数値スキームや，離散正則函数の理論への展開のシーズが得られた．

研究成果の概要（英文）：Discrete differential geometry has been considered, which is a mathematical framework describing the dynamics of geometric objects on computers. Theory of discrete integrable systems has been developed, which was successfully applied to discretize the planar curve dynamics on Eucledian plane and to construct explicit formulas in terms of the τ functions. As by-products, high-accuracy stable numerical schemes for curve dynamics with adaptive step size control, and seeds of new development to the theory of discrete conformal mappings have been obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	900000	0	900000
２０１０年度	900000	0	900000
２０１１年度	800000	240000	1040000
年度			
年度			
総　計	2600000	240000	2840000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎
キーワード：離散可積分系，離散微分幾何

１．　研究開始当初の背景

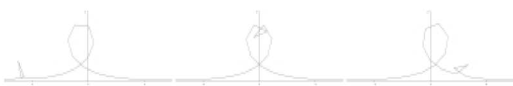
19 世紀の古典微分幾何は非線形波動と同様に可積分系の理論の源であり，そこでは曲面を記述する偏微分方程式として可積分系が現れ，その変換論が議論されてきた．1970 年代から可積分系の理論は爆発的に進展し，その流れの中で数値計算への応用を動機として可積分な差分方程式（離散可積分系)の理論が発した．1980 年代後半に平均曲率一定の曲面の研究から古典微分幾何と可積分系の関係が再 発見される中，1990 年代前半にベルリン工科大学のグループは離散可積分系と整合性の取れた離散曲面・曲線の理論的枠組みを提出し，それは現在「離散微分幾

何」と呼ばれるに至っている．離散微分幾何では自然に不均一格子（格子間隔が独立変数の任意函数である格
子）上に理論が展開されるが，不均一格子は取り扱いが難しく，具体的な曲面の構成や可視化は均一格子上で行われてきた．可積分系の理論でも，不均一格子上の離散可積分系は解の構成などの具体的な取り扱いが長い間困難とされてきた．しかし申請者は，福岡大学の松浦による離散曲線の研究に触発されて 不均一格子上の離散可積分系の研究を進め，いくつかの典型的な系のτ函数の構造を解明した．これによって申請者は離散可積分系の格子の不均一性を積極的に離散曲面・曲線の構成や可視化に応用するという着想を得た．

２．研究の目的
3 次元空間中の曲面・曲線やそのダイナミクスをコンピュータ上で実現するための理論的基盤の一つとして離散微分幾何が有望視されている．離散微分幾何では離散化された曲面や曲線を構成する要素に対して幾何学的に自然な consistency を課すが，それは可積分性の一つの表現であり，必然的に離散可積分系の理論が現れる．本研究の目的は離散微分幾何と離散可積分系の理論を融合し，曲面・ 曲線のより自然な表現や，それらのダイナミクスの高精度で高速な処理をコンピュータ上で実装するための理論的基盤を確立することである．

３．研究の方法
具体的な研究テーマとして，理論の整備・理論の展開・理論の応用に関わる次の 3 つの段階を設定した．
(1) 離散可積分系の理論の整備
（離散）微分幾何には幾何オブジェクトを記述する方程式としてさまざまな（離散）ソリトン方程式が現れる．しかし，特に不均一格子上の離散ソリトン系については KdV 方程式や sine-Gordon 方程式のような基本的なものでさえ理論がない状態であった．離散微分幾何の展開を図る上で不均一格子上の離散ソリトン系の理論の整備を図った．
(2) 離散可積分系の理論による離散微分幾何の展開
特にτ函数の理論をベースとした不均一格子上の離散可積分系の理論を用いて，さまざまな離散曲線・曲面とそのダイナミクス，また Bäcklund 変換を具体的に構成する．
(3) 格子の不均一性を積極的に用いた計算アルゴリズムの開発
(1),(2)で構築された理論を用い，具体的な例で幾何オブジェクトのダイナミクスを実現するアルゴリズムを開発する．

４．研究成果
(1)について：簡約に起因する技術的困難があった離散 KdV 方程式や離散 Schwarzian KdV 方程式などの不均一格子化にτ函数と双線形方程式の理論を通じて成功し， 不均一格子も通常の均一格子と同様に取り扱える技術を得た．理論の整備の一端は後述の図書の形でまとめて出版した．
(2)について：もっとも基本的でありながら技術的な困難によってこれまで成功していなかった，変形 KdV 方程式で記述されるユークリッド平面上の曲線の離散化，およびダイナミクスの離散化にも成功した．特に，曲線の位置ベクトルのτ函数による明示公式を構成し，それを用いて変換理論を展開した．この公式は連続・半離散・離散の全ての場合について共通の形をしていることがポイントである．以下の図は，この公式を用いて構成されたユークリッド平面上の離散曲線のループソリトンの相互作用の様子を示す．



ユークリッド平面の曲線の運動はソリトン方程式の補助線形問題においてゼロ固有値の場合に相当し，例外的な場合として直接的な取り扱いが難しかったが，τ函数の理論を用いることで困難を克服した．
また，離散曲線の離散ダイナミクスから，連続極限のダイナミクスの連続極限を解まで含めて精密に議論した．

(4) について：ユークリッド平面の曲線のダイナミクスを記述する WKI 方程式は変形 KdV 方程式とホドグラフ変換で結びついているが，それが曲線に対する Euler-Lagrange 変換であることに気がついた．そこで，離散 Euler-Lagrange 変換を定式化し，ホドグラフ変換の離散化に初めて成功した．これを利用して，WKI 方程式，曲線の別のダイナミクスを記述するが同時に光ファイバ中の極超短波パルスを記述する short pulse 方程式，Harry Dym 方程式などの半離散化・離散化を行った．これらの方程式の離散化は不均一格子上で行ったが，得られた差分方程式や微分差分方程式は可変ステップ制御を組み込んだ方程式の形をしており，元の方程式の高精度で安定な数値スキームとなっており，今後の応用が期待される．

副産物として，クライン幾何の一つである相

似幾何におけるBurgers方程式で記述される曲線の運動の離散化を定式化し，より一般的な対称性の下での理論展開への布石を打った．また，半離散変形KdV方程式の一般化である Hirota-Satsuma の非線形ネットワーク方程式の背後の階層構造を上記の結果を応用して解明し，離散可積分系の裾野を広げた．さらに，discrete Schwarzian KdV方程式（複比方程式）の研究によって，離散微分幾何の一つの分野である離散等角写像の研究への展開につなげた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

(1) J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, to appear in Kyushu J. Math.(2011)
(2) J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Explicit solutions to the semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves, J. Phys. A: Math. Theoret. **45**(2012) 045206.
(3) B.F. Feng, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno and Y. Ohta, Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves, J. Phys. A: Math. Theoret. **44**(2011) 395201.
(4) M. Hay, K. Kajiwara and T. Masuda, Bilinearization and special solutions to the discrete Schwarzian KdV equation, J. Math-for-Ind. **3**(2011)53-62.
(5) 井ノ口順一，梶原健司，松浦望，太田泰広，Semi-discrete modified KdV方程式と平面離散曲線の時間発展，九州大学応用力学研究所22-AO-S8「非線形波動研究の新しい展開－現象とモデル化－」(2011)75-81.
(6) K. Maruno and K. Kajiwara, The discrete potential Boussinesq equation and its multisoliton solutions, Applicable Analysis 89(2010) 593-609.
(7) K. Kajiwara and Y. Ohta, Bilinearization and Casorati determinant solutions to non-autonomous 1+1 dimensional discrete soliton equations, RIMS Kokyuroku Bessatu **B13**(2009) 53-74.

〔学会発表〕（計18件）

(1) K. Kajiwara, Discretization of planar curve motions and discrete modified KdV equations, American Mathematical Society 2012 Spring Southeastern Section Meeting, 2012年3月11日，南フロリダ大学，アメリカ．
(2) 黒田利信，梶原健司，相似幾何における平面離散曲線の運動，日本応用数理学会2012年研究部会連合発表会，2012年3月9日，九州大学．
(3) 野見山直之，梶原健司，Hirota-Satsuma の非線形ネットワーク方程式の双線形構造と解，日本応用数理学会2012年研究部会連合発表会，2012年3月9日，九州大学．
(4) 梶原健司，可積分系入門，離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル2012，2012年2月22日，九州大学．
(5) 梶原健司，Discretization of planar curve motions and discrete integrable systems，Winter School for Young Researchers on Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision，2011年11月25日，東北大学．
(6) 梶原健司，離散平面曲線の時間発展に現れる離散可積分系と離散ホドグラフ変換，日本応用数理学会2011年度年会，2011年9月14日，同志社大学．
(7) K. Kajiwara, An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type, Discrete Integrable Systems, 2011年7月20日，ローレンツセンター，オランダ．
(8) K. Kajiwara, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, Tropical Geometry and Integrable Systems, 2011年7月6日，連合王国．
(9) K. Kajiwara, Discrete integrable systems and dynamics of planar discrete curves, The eve of IMI & ESI, Ito one day workshop-Building a bridge between mathematics and physics, 2011年3月29日，九州大学．
(10) K. Kajiwara, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, Integrable Systems Seminar, 2011年2月18日，テキサス大学パンアメリカン校，アメリカ．
(11) K. Kajiwara, Discretization of integrable systems - from nonlinear waves to geometry, Distinguished Lecture, Colloquium, 2011年2月17日，テキサス大学パンアメリカン校，アメリカ．

(12) K. Kajiwara, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, GCOE conference: algebraic and geometric aspects of discrete integrable systems, 2010年12月16日, 東京大学.
(13) 梶原健司, Semi-discrete modified KdV 方程式の解と平面離散曲線の連続的運動, 九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の新たな展開-現象とモデル化-」, 2010年10月29日, 九州大学.
(14) 梶原健司, 平面離散曲線の運動とBäcklund 変換, 東北大学幾何セミナー, 2010年10月5日, 東北大学.
(15) 梶原健司, 平面折線の運動 その２:Bäcklund 変換と厳密解, 日本数学会2011年度秋季総合分科会, 2010年9月24日, 名古屋大学.
(16) 梶原健司, ユークリッド平面上の離散曲線の運動と Bäcklund 変換, 日本応用数理学会2010年度年会, 2010年9月8日, 明治大学.
(17) 梶原健司, Michael Hay, Discrete Schwarzian KP 方程式の双線形化と簡約, 日本数学会 2010 年度年会, 2010年3月26日, 慶應義塾大学.
(18) 梶原健司, 可積分系入門, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル, 2010年2月22日, 九州大学.

〔図書〕(計 **2** 件)
(1) 若山正人 (編), 可視化の技術と現代幾何学, 岩波書店 (**2010**).
(2) 井ノ口順一, 太田泰広, 梶原健司, 松浦望 (編), 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル **2012**, **MI** レクチャーノートシリーズ **40**, 九州大学 (**2012**).

〔産業財産権〕
○出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
http://gandalf.math.kyushu-u.ac.jp/DISDDG/

６. 研究組織
(1)研究代表者
梶原 健司 (KAJIWARA KENJI)
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号:40268115

(2)研究分担者
( )

研究者番号:

(3)連携研究者
( )

研究者番号: