

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 26 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2009～2012

課題番号：21684003

研究課題名（和文）非線形分散型方程式の対称性と特異性による解の構造の研究

研究課題名（英文）An Investigation of symmetries and structure of solutions for nonlinear dispersive equation

研究代表者

高岡 秀夫（TAKAOKA HIDEO）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：10322794

研究成果の概要（和文）：分散的な波動現象を記述するKdV方程式、非線形シュレディンガーに対し、初期値問題の適切性と解の大域可解性を研究した。特に、非線形分散型方程式の解の特異性をフーリエ空間相互作用における共鳴・非共鳴現象によって特徴付け、修正KdV方程式について一意可解性を示した。

また、非線形シュレディンガー方程式の解についての大域評価の結果、不変測度空間における微分型非線形シュレディンガー方程式について大域可解性を示した。

研究成果の概要（英文）：In this study, I have developed the local and global well-posedness for the initial value problem related to a class of nonlinear dispersive equations, such as the KdV equations and the nonlinear Schrodinger equations. I investigated the propagation of singularities of solutions using Fourier analysis, and obtained the local in time unique existence of solutions to the modified KdV equation.

Moreover, I proved the global energy estimate for the nonlinear Schrodinger equations, and proved global in time unique existence of solutions and invariance of the associated Gibbs measure to the derivative nonlinear Schrodinger equation.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
2010年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2011年度	3,800,000	1,140,000	4,940,000
2012年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
年度			
総計	15,000,000	4,500,000	19,500,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線形分散型、適切性、初期値問題

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形分散型方程式は、分散性と非線形相互作用による集約性が共存する波動現象を記述する方程式であり、その数学的研究

は、完全可積分系のような特別な場合を除いて十分に研究されていない。エネルギー解は解の大域挙動を研究する上で重要な解のクラスである。一方、エネルギークラスを広げ

て、初期値問題の適切性を調べることも、方程式の分散性と非線形相互作用の競合バランスが均衡するスケール不変性に適合した関数空間を考える上で重要な問題となりえる。

(2) 調和解析学的手法としてのフーリエ制限ノルム法は、フーリエ空間において非線形相互作用の特異性を解析する上で有効である。しかし一般の方程式に対しては、分散性と非線形相互作用の構造の違いにより各論的議論が必要であり、その研究方法論は十分とは言えず、理論の開発が必要であった。

## 2. 研究の目的

(1) 非線形分散型方程式について、関数解析的手法及び調和解析的手法を用いて、初期値問題の可解性と解の大域的な振る舞いが数学的にどのように実現されるかを調べる。

(2) 方程式の分散性と非線形相互作用による解の特異性を導出する方法として、フーリエ空間における非線形共鳴・非共鳴を用いて解の減衰と増大に関する評価を開発する。

(3) K d V方程式、非線形シュレディンガー方程式に対し、方程式の対称性（保存則、非線形項の幾何的構造）に視点をおいて、非線形評価式と大域評価式を構成し、解の一意可解性と時間大域的挙動を、波動の分散性と非線形相互作用のバランスの考察、関数空間の位相的關係の両面から明らかにすることが目的である。

## 3. 研究の方法

(1) 調和解析学及び関数解析学による精密な議論による分散評価式を開発し、非線形項の幾何学的対称性を反映した新しい解の関数空間を導入することから、時空フーリエ空間における非一様な解の特異性を解明する。

(2) 非線形構造により波動エネルギーが集約し、解の特異性が生じる。その特異性によって解の性質は特徴付けられる。非線形相互作用をフーリエ空間における共鳴・非共鳴に分類することで波動の集約を特徴付ける。また、フーリエ空間における波動エネルギーの転換を制御することから、解の大域的評価式を導き、時間大域解の挙動を調べる。

(3) 時間大域解の存在を示すために、ハミルトン力学系における不変測度の構成を展開することを試みる。非線形共鳴・非共鳴の分類による時空間における非一様な特異性の解析、フーリエ空間における波動エネルギー

の転換理論を統合した形で大域的評価式を調べる。

## 4. 研究成果

(1) 周期境界条件の修正K d V方程式について、フーリエ空間における非線形共鳴・非共鳴の分類による特異性を反映した解の関数空間を構成し、弱解の広い関数空間において、初期値問題の時間局所適切性を構成した。その際、非線形共鳴によりこれまででは非有界として処理できなかった成分を制御するために、解の軌道を修正し、それに適合する形で解の関数空間を改良する手法を導入した。

(2) 微分を非線形項に含む非線形シュレディンガー方程式について、解の存在をハミルトン力学系における不変測度空間で示した。フーリエ空間において非線形共鳴・非共鳴による分類を行い、不変測度空間において発散してしまう共鳴成分の和は相殺されることを見出した。技術的には、方程式の有限次元関数空間モデルを構成し、そのモデルに対して不変測度による一様評価から解の大域評価式を得た。有限次元関数空間と本来の無限次元関数空間とを補完する解析が本質であるが、時間局所適切性の証明で起用したエネルギー評価法を改良し、誤差評価を込めた摂動評価式を示すことによって解決した。解の連続性についての証明において、フーリエ空間における波動エネルギーが低周波から高周波に移送される評価を時間一様に制御することを示した。

(3) 周期境界条件の下、空間2次元の場合の非線形シュレディンガー方程式について、フーリエ空間における非線形共鳴のメカニズムがある図形の配置とその組み合わせといった幾何学的構造を持つことを発見し、またその配置は空間1次元であることを示した。これは、非線形相互作用による特異性として考えられる非分散成分の波動が1次元構造を持っていることを示す。

(4) 空間2次元の場合の非線形シュレディンガー方程式について、これまでにフーリエ空間において波動エネルギーが低周波から高周波に転換される現象を研究し、本研究期間において論文を調整した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1. J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrodinger equation, *Invent. Math.*, 181 (2010), 39–113, 査読有.

2. K. Nakanishi, H. Takaoka, Y. Tsutsumi, Local well-posedness in low regularity of the mKdV equation with periodic boundary condition, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 28 (2010), 1635–1654, 査読有.

3. S. Gustafson, H. Takaoka and T. -P. Tsai, Stability in  $H^{1/2}$  of the sum of K solitons for the Benjamin-Ono equation, *J. Math. Phys.*, 50 (2009), 14pp, 査読有.

4. K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Unique local existence of solution in low regularity space of the Cauchy problem for the mKdV equation with periodic boundary condition, *Séminaire: Équations aux Dérivées Partielles*, 2007–2008 (2009), 7pp, 査読有.

[学会発表] (計 13 件)

1. 高岡 秀夫, Almost sure global well-posedness for the periodic derivative NLS, 第 5 回名古屋微分方程式研究集会, 2013 年 3 月 12 日, 名古屋大学

2. 高岡 秀夫, Almost sure global well-posedness for the periodic derivative NLS equation, *Nonlinear Dispersive Equations and Fluid Mechanics*, 2012 年 12 月 12 日, 東北大学

3. 高岡 秀夫, Low regularity well-posedness and applications to almost sure global well-posedness of the periodic derivative NLS equation, 弘前非線形方程式研究, 2012 年 11 月 3 日, 弘前大学

4. 高岡 秀夫, Low regularity

well-posedness theory and applications to almost sure global well-posedness of the periodic derivative NLS equation: Part 2, *Topics on Nonlinear Partial Differential Equations*, 2012 年 9 月 27 日, 浦項工科大学校 (韓国)

5. 高岡 秀夫, Low regularity well-posedness theory and applications to almost sure global well-posedness of the periodic derivative NLS equation: Part 1, *Topics on Nonlinear Partial Differential Equations*, 2012 年 9 月 26 日, 浦項工科大学校 (韓国)

6. 高岡 秀夫, Weak solutions for the derivative nonlinear Schrodinger equations, The 7th HU and SNU symposium on Mathematics, 2011 年 11 月 16 日, ソウル大学 (韓国)

7. 高岡 秀夫, Low regularity solutions to the derivative nonlinear Schrodinger equation, 熊本大学応用解析セミナー, 2011 年 12 月 10 日, 熊本大学

8. 高岡 秀夫, On the derivative nonlinear Schrodinger equation with the periodic boundary, *Nonlinear Wave and Dispersive Equation*, 2012 年 3 月 7 日, 京都大学

9. 高岡 秀夫, A priori estimates and weak solutions for the derivative nonlinear Schrodinger equations on torus, *Workshop on differential equations and its applications*, 2011 年 1 月 15 日, National Cheng Kung University (台湾)

10. 高岡 秀夫, Well-posedness of the derivative nonlinear Schrodinger equation, *NLPDE seminar*, 2010 年 11 月 26 日, 京都大学

11. 高岡 秀夫, 非線形シュレディンガー方程式の大域解と解のソボレフノルム評価, 偏微分方程式セミナー, 2010 年 4 月 19 日, 北海道大学

12. 高岡 秀夫, 非線形シュレディンガー方程式に対するエネルギー転換と解のエネルギー評価, 解析セミナー, 2010年2月15日, 神戸大学

13. 高岡 秀夫, Growth of Sobolev norms of solutions for the cubic NLS on  $\mathbf{T}^2$ , 第9回名古屋国際数学コンファレンス「Harmonic Analysis and Partial Differential Equations」, 2009年9月29日, 名古屋大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高岡 秀夫 (TAKAOKA HIDEO)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号: 10322794

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし