様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月３１日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009 ～ 2012
課題番号：21700014
研究課題名（和文）代数的証明論と余代数的証明論

研究課題名（英文）　Algebraic and coalgebraic proof theories

研究代表者
照井　一成　（TERUI KAZUSHIGE）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：70353422

研究成果の概要（和文）：(1) 代数的証明論の研究を部分構造論理の枠組みで推進した。部分構造論理の公理は階層性を成すことを示し、低い階層に属する論理について、カット除去定理と代数的な意味での完備化可能性が正確に対応することを示した。(2) 線形論理から派生したゲーム意味論の一種であるルディクス理論を、余代数的・計算論的観点から再定式化した。構成的古典命題論理に相当する証明体系について対話的完全性定理を証明し、(プログラミング言語型理論の意味での）一般再帰型の解釈に応用した。

研究成果の概要（英文）：(1) A research program called algebraic proof theory for substructural logics is developed. It is shown that axioms of substructural logics form a hierarchy, and for logics at a lower level, the cut elimination theorem precisely corresponds to the closure under completions in the algebraic sense. (2) The theory of ludics, a variant of game semantics that originates in linear logic, is reformulated from a computational and coalgebraic point of view. An interactive completeness theorem is proved for a proof system that corresponds to constructive classical propositional logic, and is applied to an interpretation of general recursive types in the sense of the type theory for programming languages.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：情報学
科研費の分科・細目：情報学基礎・情報学基礎理論
キーワード：数理論理学、線形論理、部分構造論理、ルディクス、再帰型

１．研究開始当初の背景

(1) 古典論理や直観主義論理から構造規則を弱めることにより得られるさまざまな非古典論理を総称して**部分構造論理**という。研究代表者は 2000 年代前半より部分構造論理の文脈で**代数的証明論**の研究プログラムを提唱してきた。代数的証明論とは、一言でいえば証明論と代数的手法の融合であり、たとえば証明論的手法を代数の文脈に直接適用して新しい代数構成法を与えたり、逆に代数的手法を証明論の文脈に直接適用して証明論的定理に代数的証明を与えたりする試み

である。その核心は、証明論の基本定理であるカット除去定理と代数の完備化は本質的に同じだという洞察である。この代数的証明論が本研究の第一の課題である。

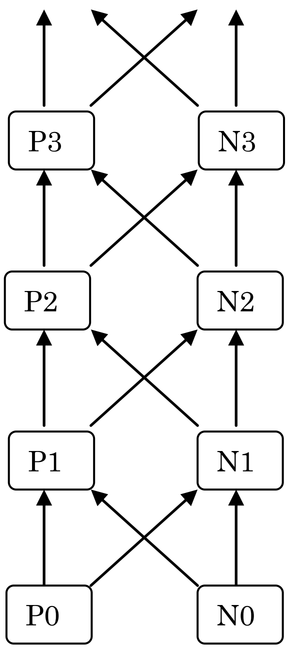
(2) もう一つの課題は、線形論理から派生した研究プログラムである**ルディクス**（あそび）の理論である。これは関数型プログラミング言語のゲーム意味論の亜種であり、無秩序なエージェント間の対話的状況から、秩序ある論理（型）を導き出すことにより、さまざまな論理的・計算論的現象を説明しようとする野心的試みである。しかし内容が豊富であるのに比例して形式があまりに煩雑であり、そのことがルディクスの発展を阻害する一つの要因となってきた。

２．研究の目的
(1) 部分構造論理の代数的証明論をもっとも一般的なセッティング（**FL** 代数全体）で展開する。部分構造階層の構造を解明し、カット除去と代数的完備化の同等性を正確に示し、それにより証明論・代数の可能性と限界を明らかにする。

(2) ルディクス理論を余代数的・計算論的観点から再定式化し、ゲーデル完全性定理の対話的バージョンを示し、プログラミング言語型理論における一般再帰型の論理的理解へと役立てる。

３．研究の方法
純粋に数学的な手法による。

４．研究成果
(1) ①部分構造論理の諸公理の複雑さを計るために**部分構造階層**（下図）を定式化した。

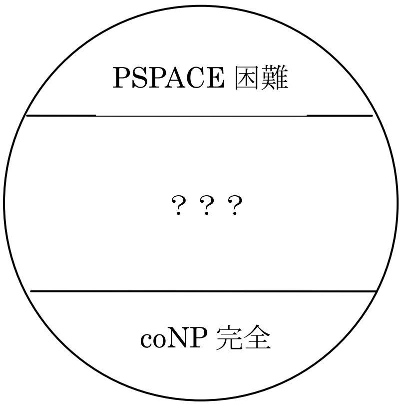


そして公理の複雑さをレベル N2 に制限すれば、与えられた論理について強い形のカット除去定理が成り立つことと、対応する代数クラスが（マクニール）完備化について閉じていることは正確に一致することを証明した。この結果は、証明論的手法と代数的手法の間には普通想定されているよりもはるかい深い対応関係があり、証明論的手法を代数に直接適用すること、あるいはその逆が可能であることを示唆している。

②上の基礎成果の応用として、証明論における超シークエント計算のアイデアを代数の文脈に直接適用し、以下の結果を得た。すなわち、レベル P3 の公理により定義されるどんな代数クラスも（付加的な仮定のもとで）ある種の完備化について閉じている。先行研究により、たとえばハイティング代数の等式クラスの中にはマクニール完備化について閉じているものはちょうど３つしかないことが知られているが、それと対照的に本研究は、数多くの等式クラスが（必ずしもマクニールではない）ある種の完備化について閉じていることを示すものであり、完備化の可能性を飛躍的に高める結果であると言える。

③レベル N3 にはどのような完備化も受け付けない公理があることが知られており、完備化とカット除去の関係から、そのような公理により定義される論理については、強い形のカット除去定理が成り立つような証明体系は存在しえないことがわかる。これはある意味で証明論の絶対的な限界を示しているといってよい。しかし、そのような論理（とくにアーベル論理とウカシェーヴィッチ無限多値論理）に対しても、弱い形のカット除去定理なら成り立たせることは可能である。このことはすでに知られている通りであるが、本研究では代数的証明論の枠組みでそのような弱い成果を分析し、それらを体系的に導出する方法を検討した。

④部分構造論理の選言特性と計算量についての研究を行った。まず、与えられた部分構造論理が選言特性を満たせば、その計算量は PSPACE 困難となることを証明した。そして選言特性を示すための強力な代数的手法を考案した。部分構造階層のアイデアと組み合わせることにより、広範なクラスの論理が選言特性を満たし、それゆえ計算量は PSPACE 困難であることを証明した。この結果は次の問題を提起する。これまでに計算量が知られている部分構造論理は coNP 完全であるか PSPACE 困難であるかのどちらかであり、その中間の計算量を持つ論理の存在は知られていない。そのような部分構造論理はそもそも存在しうるのだろうか？この**二分性問題**は部分構造論理研究において根本的な重要性を持つものと考えられる。



(2) ①ルディクス理論の基盤を計算論的・余代数的に再整備した。Girard によるオリジナルのルディクスでは局所性が重視されたため、基本対象である**デザイン**は絶対アドレス用いて定義されており、かなり煩雑であった。そこで本研究では思い切って局所性を捨象し、ラムダ計算やパイ計算の記法を援用することにより自然なシンタックスを与えた。また一つ一つのデザインは無限に大きいこともありうる。伝統的にはそのような無限的対象は有限近似を介して取り扱われてきたが、本研究では、近年標準となりつつある余代数と余帰納法の手法を用いて、有限近似を介さず直接に無限的対象として取り扱うことにした。結果として、自然で使い勝手のよい基盤が得られ、ルディクスの枠組みでより深い研究を推進することが可能となった。

②古典的なゲーデル完全性定理は、どんな命題にも証明Ｐか反例モデルＭのどちらか一方が存在することを主張するものであるが、そこではＰとＭの間の相互関係は一切想定されていない。しかし現実の数学における問題解決は、しばしば証明者と反証者の対話によって遂行される。そこで本研究では、ルディクスの枠組みで証明と反証が“対話”するような状況を設定し、新しい**対話的完全性定理**を（構成的な）古典命題論理について証明した。それによれば、どのような命題Ａとその証明の試みＰをとっても、ＰはＡの本当の証明になっているか、あるいはＰを打ち負かす反証Ｍが存在する。この結果は古典的な完全性概念と、最近のゲーム意味論的な完全性概念を橋渡しするものと解釈できる。

②上記の対話的完全性定理を無限的な状況へと拡張した。そこでは証明の試みのみならず、論理式も、計算も、すべて無限の深さを持ち、すべての概念は帰納法ではなく余帰納法により定義される。無限の深さを持つ論理式は特に（プログラミング言語の型理論の意味での）一般再帰型を含む。そこで対話的完全性定理の応用として、無限ルディクスにおいては（つまり無限の深さの証明・論理式を許す構成的古典命題論理においては）どんな再帰型も一意に解釈できることを証明した。すなわちどんな型方程式系

$$
\begin{gathered}
X_1 = P(X_1, \cdots, X_n) \\
\cdots \\
X_n = P(X_1, \cdots, X_n)
\end{gathered}
$$

も一意解を持つことを証明した。同様の結果は、領域理論および操作的意味論の枠組みですでに証明されているが、本研究は新たにルディクスの観点から一般再帰型に解釈を与えるものである。

③ 派生的研究として、単純型付ラムダ計算についての興味深い性質を、線形論理の表示的意味論を用いて証明した。**Schubert の問題**とは、ラムダ項の正規化（プログラムの実行）に要する計算量を、項の型のオーダーごとに特定する問題である。たとえばオーダー2, 3 については、それぞれ計算量は P 完全、PSPACE 完全となることが Schubert により証明されている。本研究では Schubert の問題（のやや簡略化された形）を任意のオーダー（2 以上）について解決した。すなわち m を自然数とするとき、オーダー2m+2 のラムダ項の値を求める問題は m-EXPTIME 完全であり、オーダー2m+3 の場合には、m-EXPSPACE 完全となることを証明した。

ラムダ項のオーダー	計算量
2	P
3	PSPACE
4	EXPTIME
5	EXPSPACE
6	2-EXPTIME
7	2-EXPSPACE
…	…

この結果を証明するために、Winskel らに由来する**線形論理のスコットモデル**とラムダ計算の共通型システムとの同型性を本質的に用いた。なお本結果は書き換え系分野の主要国際会議である RTA’12 において最優秀論文賞を受賞した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）
当該分野では学会予稿集に掲載された論文も雑誌論文と同等に扱われるため、この欄に含める（すべて査読あり）。

① K. Terui. Semantic evaluation, intersection types and complexity of simply typed lambda calculus. Proceedings of 23rd International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA'12), pp. 323 - 338, 2012 (**最優秀論文賞**).
DOI: 10.4230/LIPIcs.RTA.2012.323
② A. Ciabattoni, N. Galatos and K. Terui. Algebraic proof theory for substrutural logics: cut-elimination and completions. Annals of Pure and Applied Logic, 163(3): 266 - 290, 2012.
DOI: 10.1016/j.apal.2011.09.003
③ K. Terui. Computational ludics. Theoretical Computer Science, 412(20):2048 - 2071, 2011.
DOI: 10.1016/j.tcs.2010.12.026
④ R. Horcik and K. Terui. Disjunction property and complexity of substructural logics. Theoretical Computer Science, 412(31): 3992 - 4006, 2011.
DOI: 10.1016/j.tcs.2011.04.004
⑤ 5. A. Ciabattoni, N. Galatos and K. Terui. MacNeille completions of FL-algebras. Algebra Universalis, 66(4): 405 - 420, 2011.
DOI: 10.1016/j.tcs.2011.04.004
⑥ A. Brunel and K. Terui. Church=>Scott = Ptime: an application of resource sensitive realizability. Proceedings of Developments in Implicit Computational Complexity (DICE'10), pp. 31 - 46, 2010.
DOI: 10.4204/EPTCS.23.3
⑦ M. Basaldella and K. Terui. Infitary completeness in ludics. Proceedings of Logic in Computer Science (LICS'10), pp. 294 - 303, 2010.
DOI: 10.1109/LICS.2010.47
⑧ M. Basaldella and K. Terui. On the meaning of logical completeness. Logical Methods in Computer Science, 6(4:11) 1 - 35, 2010.
DOI: 10.2168/LMCS-6(4:11)2010
⑨ A. Ciabattoni, L. Strassburger and K. Terui. Expanding the realm of systematic proof theory. Proceedings of Computer Science Logic (CSL'09), pp. 163 - 178, 2009.
DOI: 10.1007/978-3-642-04027-6_14
⑩ M. Basaldella and K. Terui. On the meaning of logical completeness. Proceedings of Typed Lambda Calculus and its Applications (TLCA'09), pp.50 - 64, 2009.
DOI: 10.1007/978-3-642-02273-9_6

〔学会発表〕(計５件)

① K. Terui. Proof theory and algebra in substructural logics. 20th International Conference on Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods (TABLEAUX'11), Bern (Switzerland), 2011年7月7日(招待講演).
② K. Terui. MacNeille-type completions for residuated lattices and sequent-type proof systems for substructural logics. 2nd International Conference on Order, Algebra and Logics, Krakow (Poland), 2011年6月8日(招待講演).
③ 照井一成. 線形論理とラムダ計算の計算量. 第 13 回プログラミングおよびプログラミング言語ワークショップ(PPL'11), 札幌, 2011 年3 月10日(招待講演).
④ K. Terui. Algebraic proof theory for nonclassical logics II. Topology, Algebra and Categories in Logic (TACL' 09), Amsterdam (Netherlands), 2009年7月8日(招待講演).
⑤ K. Terui. Semantic methods in substructural and fuzzy logics. Conferene on Non-Classical Mathematics, Hejnice (Czech), 2009年6月20日(招待講演).

６．研究組織

(1)研究代表者

照井　一成 (TERUI KAZUSHIGE)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：70343522